



**Concursul regional de matematică „Ioan Aron”  
clasa a III-a – etapa județeană  
13 aprilie 2024  
Barem**

1. a) Dacă  $a = 9 \times 10 \times 100$

$$b = (202 + 98) - (2 \times 100 + 9 \times 10 + 5)$$

$$c = 3\,236 - 123 \times 12$$

Calculează  $a - b \times c$

$$a = 9\,000$$

0,5 p

$$b = 5$$

1 p

$$c = 1760$$

1 p

$$a - b \times c = 200$$

1 p

Total: 3,5 p

b) Dacă jumătatea unui număr este egală cu produsul dintre 609 și 4, află dublul acestui număr, din care vei scădea apoi produsul cifrelor sale. Ce rezultat ai obținut?

$$609 \times 4 = 2436 \text{ (jumătatea)}$$

0,5 p

$$2 \times 2436 = 4872 \text{ (numărul)}$$

1 p

$$2 \times 4872 = 9744 \text{ (dublul numărului)}$$

0,5 p

$$9 \times 7 \times 4 \times 4 = 1008 \text{ (produsul cifrelor)}$$

1 p

$$9744 - 1008 = 8736$$

0,5 p

Total: 3,5 p

**Total subiectul 1: 7 puncte**

2. a) O florărie a vândut dimineața 59 de flori: lalele, trandafiri și zambile. Numărul zambilelor reprezintă o cincime din cel al lalelelor și este cu 17 mai mic decât cel al trandafirilor vânduți. Câte flori s-au vândut de fiecare fel?

lalele / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ /

trandafiri / \_\_\_\_\_ / 17 /

59

zambile / \_\_\_\_\_ /

1p

flori:

$$59 - 17 = 42$$

0,5p

$$42 : 7 = 6 \text{ (zambile)}$$

1p

$$6 + 17 = 23 \text{ (trandafiri)}$$

1p

$$5 \times 6 = 30 \text{ (lalele)}$$

1p

Total: 4,5p





4. Mama Anei a citit trei cărți. Când a însumat numărul de pagini, a obținut un număr egal cu produsul dintre cel mai mare număr de două cifre pare și cel mai mic număr de două cifre impare diferite. Prima și a doua carte însumau un număr de pagini egal cu 786 de pagini, iar a doua și a treia carte însumau 649 de pagini. Câte pagini avea fiecare carte pe care a citit-o?

$$88 \times 13 = 1144 \text{ ( pagini cele trei cărți)} \qquad 1 \text{ p}$$

Notăm numărul de pagini al fiecărei cărți cu a, b, c și obținem următoarele relații:

$$a + b + c = 1144$$

$$a + b = 786$$

$$b + c = 649$$

$$1144 - 786 = 358 \text{ pagini ( a treia carte)} \qquad 2 \text{ p}$$

$$1144 - 649 = 495 \text{ pagini ( prima carte)} \qquad 2 \text{ p}$$

$$786 - 495 = 291 \text{ pagini ( a doua carte)} \qquad 2 \text{ p}$$

**Total subiectul 4: 7 puncte**



**Concursul regional de matematică „Ioan Aron”  
clasa a IV-a – etapa județeană  
13 aprilie 2024  
Barem**

1. a) Calculează:

$$\begin{aligned} & [ \underline{642 : 2} + (13025-1375) : 25 ] - (5040 - 1350) : 30 = \\ & = [ \underline{321} + (13025-1375) : 25 ] - (5040 - 1350) : 30 && 0,5p \\ & = ( \underline{321} + \underline{11650 : 25} ) - (5040 - 1350) : 30 && 0,5p \\ & = ( \underline{321+466} ) - (5040 - 1350) : 30 && 0,5p \\ & = 787 - (5040 - 1350) : 30 && 0,5p \\ & = 787 - \underline{3690 : 30} && 0,5p \\ & = 787 - 123 && 0,5p \\ & = 664 && 0,5p \end{aligned}$$

$$7 \times 0,5 = 3,5 \text{ p}$$

b) Află valoarea lui **a** :

$$\begin{aligned} & [ \underline{880 : 4} - (10 \times a - 277) + 13 ] : 20 + \underline{249 \times 4} = 1001 \\ & [ 220 - (10 \times a - 277) + 13 ] : 20 + 996 = 1001 / - 996 && 0,5p \\ & [ 220 - (10 \times a - 277) + 13 ] : 20 = 5 / \times 20 && 0,5p \\ & 220 - (10 \times a - 277) + 13 = 100 / -13 && 0,5p \\ & 220 - (10 \times a - 277) = 87 && 0,5p \\ & 10 \times a - 277 = 133 / + 277 && 0,5p \\ & 10 \times a = 410 / : 10 && 0,5p \\ & a = 41 && 0,5p \end{aligned}$$

$$7 \times 0,5 = 3,5 \text{ p}$$

**Total subiectul 1: 7 puncte**



2. Maria a cumpărat de la librărie 2 creioane și 3 pixuri. Când Andrei a întrebat-o cât au costat rechizitele, Maria i-a răspuns: „Dacă aș fi cumpărat 3 creioane și 8 pixuri, aș fi plătit 30 de lei, dacă aș fi cumpărat 5 creioane și 10 pixuri, aș fi plătit 40 de lei.” Află cât au costat rechizitele cumpărate de Maria!

$$3 \text{ creioane} \dots\dots\dots 8 \text{ pixuri} \dots\dots\dots 30 \text{ lei} \quad \times 5 \quad 0,5\text{p}$$

$$5 \text{ creioane} \dots\dots\dots 10 \text{ pixuri} \dots\dots\dots 40 \text{ lei} \quad \times 3 \quad 0,5\text{p}$$

---


$$15 \text{ creioane} \dots\dots\dots 40 \text{ pixuri} \dots\dots\dots 150 \text{ lei} \quad 0,5\text{p}$$

$$15 \text{ creioane} \dots\dots\dots 30 \text{ pixuri} \dots\dots\dots 120 \text{ lei} \quad 0,5\text{p}$$

---


$$/ \quad (40-30) \text{ pixuri} \dots\dots\dots (150 - 120)\text{lei}$$

$$10 \text{ pixuri} = 30 \text{ lei} \quad 0,5\text{p}$$

$$1 \text{ pix} = 30 \text{ lei} : 10$$

$$1 \text{ pix} = 3 \text{ lei} \quad 0,5 \text{ p}$$

$$3 \text{ creioane} + 8 \text{ pixuri} \times 3 \text{ lei} = 30 \text{ lei} \quad 0,5\text{p}$$

$$3 \text{ creioane} + 24 \text{ lei} = 30 \text{ lei} \quad 0,5\text{p}$$

$$3 \text{ creioane} = 30 \text{ lei} - 24 \text{ lei}$$

$$3 \text{ creioane} = 6 \text{ lei} \quad 0,5\text{p}$$

$$1 \text{ creion} = 6 \text{ lei} : 3$$

$$1 \text{ creion} = 2 \text{ lei} \quad 0,5\text{p}$$

Câți lei costă rechizitele cumpărate de Maia?

$$\underline{2 \text{ creioane} \times 2 \text{ lei}} + 3 \text{ pixuri} \times 3 \text{ lei} = \quad 0,5\text{p}$$

$$= 4 \text{ lei creioanele} + \underline{3 \text{ pixuri} \times 3 \text{ lei}} \quad 0,5\text{p}$$

$$= 4 \text{ lei creioanele} + \underline{9 \text{ lei pixurile}} \quad 0,5\text{p}$$

$$= 13 \text{ lei ( rechizitele)} \quad 0,5\text{p}$$

Răspuns: Maria a plătit 13 lei

Total: 7 p

**Total subiectul 2: 7 puncte**



3. a) Pe un raft al unei librării se află enciclopedii. Triplul succesoriului numărului de enciclopedii este cu 26 mai mare decât dublul predecesorului aceluși număr. Care este numărul de enciclopedii de pe raft?

Notăm cu  $p$  – predecesorul

Notăm cu  $s$  - succesorul

$2 \times p$  / \_\_\_\_ / \_\_\_\_ /

26

} 2 2 2

$3 \times s$  / \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_ /



1p

$$26 - 2 \times 3 = 26 - 6 = 20$$

$$\text{predecesorul} = 20$$

$$\text{numărul} = 21$$

$$\text{succesorul} = 22$$

0,5p

0,5p

0,5p

0,5p

$$\text{Verificare: } 3 \times 22 - 2 \times 20 = 66 - 40 = 26$$

Răspuns: 21 enciclopedii

Total: 3 p

b) Pentru paginarea unei enciclopedii, s-au folosit 1212 cifre. Câte pagini are enciclopedia?

- de la 1 la 9 sunt 9 numere de o cifră , deci se folosesc **9 cifre** 0,5 p

- de la 10 la 99 sunt  $(99 - 10) + 1 = 90$  numere de 2 cifre, deci se folosesc  $2 \times 90 = 180$  cifre 1p

-  $9 + 180 = 189$  cifre 0,5 p

-  $1212 - 189 = 1023$  cifre rămase 0,5p

-  $1023 : 3 = 341$  pagini cu 3 cifre 1p

-  $341 + 90 + 9 = 440$  pagini 0,5p

Total: 4 p

**Total subiectul 3: 7 puncte**



4. Elevii claselor a IV-a dintr-o școală au plantat puieti de stejar. În prima zi au plantat două cincimi din puieti și încă 4. În a doua zi au plantat un sfert din rest și încă 3, iar în a treia zi au plantat două treimi din noul rest și încă 2. Au rămas de plantat 8 puieti. Câți puieti de stejar au plantat în fiecare zi? Câți puieti de stejar au fost la început?

$$\frac{\quad}{\quad} / \frac{\quad}{\quad} / \frac{4}{\quad} / \frac{\quad}{\quad} / \frac{\quad}{\quad} / \frac{\quad}{\quad}$$

$2/5 + 4$  (prima zi)

$$\frac{\quad}{\quad} / \frac{3}{\quad} / \frac{\quad}{\quad} / \frac{\quad}{\quad} / \frac{\quad}{\quad}$$

$1/4$  din rest + 3 (a doua zi)

$$\frac{\quad}{\quad} / \frac{\quad}{\quad} / \frac{2}{\quad} / \frac{8}{\quad} / \frac{\quad}{\quad}$$

$2/3$  din rest + 2 (a treia zi)

1p

$2 + 8 = 10$  (o treime din puietii rămași după a doua zi)

$3 \times 10 = 30$  (puieti rămași pentru a treia zi)

$2 \times 10 + 2 = 22$  (**puieti plantați a treia zi**)

1,5p

$30 + 3 = 33$  (trei sferturi din puietii rămași după prima zi)

$33 : 3 = 11$  (un sfert din puietii rămași pentru a doua zi)

$11 + 3 = 14$  (**puieti plantați a doua zi**)

1,5p

$4 \times 11 = 44$  (puieti rămași după prima zi)

$44 + 4 = 48$  (trei cincimi din totalul de puieti)

$48 : 3 = 16$  (o cincime din totalul de puieti)

$2 \times 16 + 4 = 32 + 4 = 36$  (**puieti plantați în prima zi**)

1,5p

$5 \times 16 = 80$  (**puieti în total**)

1,5p

**Total subiectul 4: 7 puncte**



**Concursul de matematică „Ioan Aron”**  
**clasa a V-a - etapa județeană**  
**13 aprilie 2024**  
**BAREM**

1.

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2023}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2022}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1012} + \frac{1}{1013}\right) = \frac{x}{y}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2023}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2022}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1012} + \frac{1}{1013}\right) = \frac{x}{y} - 1 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{2025}{2 \cdot 2023} + \frac{2025}{3 \cdot 2022} + \dots + \frac{2025}{1012 \cdot 1013} = \frac{x-y}{y} \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$y \cdot 2025 \left(\frac{1}{2 \cdot 2023} + \frac{1}{3 \cdot 2022} + \dots + \frac{1}{1012 \cdot 1013}\right) = x - y \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$x - y = 2025 \cdot y \left(\frac{1}{2 \cdot 2023} + \frac{1}{3 \cdot 2022} + \dots + \frac{1}{1012 \cdot 1013}\right) \Rightarrow 2025 | (x - y) \quad \dots\dots\dots 2p$$

2.

$$5^{2n} \cdot 7^{2n} \cdot 10 + 5^{2n} \cdot 7^{2n+2} = 5^{2n} \cdot 7^{2n} (9 + 1) + 5^{2n} \cdot 7^{2n} \cdot 7^2 \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$= 5^{2n} \cdot 7^{2n} \cdot 3^2 + 5^{2n} \cdot 7^{2n} + 5^{2n} \cdot 7^{2n} \cdot 7^2 \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$= (5^n \cdot 7^n \cdot 3)^2 + (5^n \cdot 7^n)^2 + (5^n \cdot 7^n \cdot 7)^2 \quad \dots\dots\dots 3p$$

3. Un număr natural va fi numit special, dacă este de forma  $\overline{abcd}$  cu a, b, c, d cifre nenule, iar numărul  $a \cdot c + b \cdot d$  este pătrat perfect.

a) cel mai mic număr este de forma  $\overline{111x}$  cu cel mai mic x posibil  $3 \Rightarrow 1113$  .....2p

cel mai mare număr este de forma  $\overline{999y}$  cu cel mai mare y posibil  $7 \Rightarrow 9997$  .....2p

b)

$$\overline{abcd} \in \{1347, 1279\} \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$S = 1347 + 1279 = 2626 \quad \dots\dots\dots 1p$$

4.

$$3 \cdot 4 + 18 = 12 + 18 = 30 \quad (\text{după 1 minut}) \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$3 \cdot 0 + 18 = 18 \quad (\text{după 2 minute}) \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$1 \cdot 8 + 18 = 8 + 18 = 26 \quad (\text{după 3 minute}) \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$2 \cdot 6 + 18 = 12 + 18 = 30 \quad (\text{după 4 minute}) \quad \dots\dots\dots 1p$$

Observăm că din 3 în 3 minute se repetă valorile: .....1p

$$24 \cdot 60 + 9 \cdot 60 + 44 = 2024 \text{ minute} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$2024 = 3 \cdot 674 + 2 \Rightarrow \text{numărul afișat este } 18. \quad \dots\dots\dots 1p$$





**Concursul de matematică „Ioan Aron”**  
**clasa a VI-a - etapa județeană**  
**13 aprilie 2024**  
**BAREM**

1.

$$a = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{49^2}{48 \cdot 50}$$

Prin calcul se ajunge la:  $a = \frac{49}{25}$  .....3p

$$\begin{aligned} b &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + 1 + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + 1 + \frac{1}{47 \cdot 49} = 24 + \left( \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{47 \cdot 49} \right) = \\ &= 24 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \dots + \frac{1}{47} - \frac{1}{49} \right) = 24 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{49} \right) = \\ &= 24 + \frac{1}{2} \cdot \frac{48}{49} = \frac{24(49 + 1)}{49} = \frac{24 \cdot 50}{49} \end{aligned}$$

$$b = \frac{2 \cdot 24 \cdot 25}{49} \dots\dots\dots 3p$$

$$a \cdot b = 48 \in \mathbb{N}. \dots\dots\dots 1p$$

2. a)

$$\frac{3}{a} = \frac{4}{b} = \frac{12}{c} = 13$$

$$13a = 3; a = \frac{3}{13}$$

$$13b = 4; b = \frac{4}{13}$$

$$13c = 12; c = \frac{12}{13} \dots\dots\dots 1p$$

$$\left( 3 + \frac{3}{13} \right) \cdot \frac{3}{13} + \left( 4 + \frac{4}{13} \right) \cdot \frac{4}{13} + \left( 12 + \frac{12}{13} \right) \cdot \frac{12}{13} = 14 \dots\dots\dots 1p$$



$$\frac{42 \cdot 3}{13 \cdot 13} + \frac{56 \cdot 4}{13 \cdot 13} + \frac{168 \cdot 12}{13 \cdot 13} = 14$$

$$\frac{126 + 224 + 2016}{13 \cdot 13} = 14$$

$$\frac{2366}{169} = 14$$

14 = 14 .....2p

b)  $A = [(-1) \cdot (1)]^3 \cdot a = -1 \cdot a = -a$  .....1p

Fie  $n$  - par

$$B = 1 - 1 + 1 + 1 + 1(-1) = 1$$

$$A = -1$$

$-a = -1 \Rightarrow a = 1$  .....1p

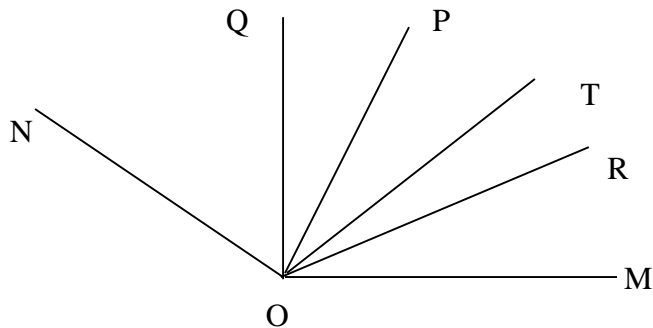
Fie  $n$  - impar

$$B = -1 + 1 - 1 + 1 + (-1)(1) = -1$$

$$A = -1$$

$-a = 1 \Rightarrow a = -1$  .....1p

3.



Fie  $y = \sphericalangle MON$  .....1p



$$\Rightarrow \sphericalangle MOP = \sphericalangle PON = \frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle MOR = \sphericalangle ROP = \frac{y}{4}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle NOR = \frac{y}{2} + \frac{y}{4} = \frac{3y}{4} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \sphericalangle NOQ = \frac{y}{2} + \frac{y}{4} = \frac{3y}{4}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle NOQ = \frac{\sphericalangle NOR}{2} = \frac{3y}{8} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \sphericalangle MOQ = y - \frac{3y}{8} = \frac{5y}{8} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \sphericalangle MOT = \frac{\sphericalangle MOQ}{2} = \frac{5y}{16} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \sphericalangle ROT = \frac{5y}{16} - \frac{y}{4} = \frac{y}{16} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow y = 16 \sphericalangle ROT = 16 \cdot 11^\circ = 176^\circ \dots\dots\dots 1p$$

4.

- a)  $\triangle ABD$  isoscel și  $AD = BD$  .....1p
- $\triangle AEC$  isoscel și  $AE = EC$  .....1p
- $\triangle BEF$  isoscel și  $BE = EF$  .....1p
- $AF = AE + EF$
- $BC = BE + EC$
- $AF = BC$  .....2p
- b)  $PF = DE \Rightarrow PE = EC$  .....1p
- $\triangle PEC$  isoscel și  $m(\sphericalangle BCP) = 54^\circ$
- $CP \perp BF$  .....1p



**Concursul de matematică „Ioan Aron”**  
**clasa a VII-a - etapa județeană**  
**13 aprilie 2024**  
**BAREM**

1. a)

$$\overline{a,b(cd)} = \frac{990a + 99b + 10c + d}{990}$$

$$\overline{b,c(da)} = \frac{990b + 99c + 10d + a}{990}$$

$$\overline{c,d(ab)} = \frac{990c + 99d + 10a + b}{990}$$

$$\overline{d,a(bc)} = \frac{990d + 99a + 10b + c}{990}$$

$$A = \sqrt{\frac{1100(a+b+c+d)}{990}} = \sqrt{\frac{10(a+b+c+d)}{9}} = \frac{\sqrt{10(a+b+c+d)}}{3} \dots\dots\dots 2p$$

a,b,c,d cifre diferite nenule  $\Rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 \leq a + b + c + d \leq 30 \mid \cdot 10$

$$100 \leq 10(a + b + c + d) \leq 300 \mid \sqrt{\phantom{x}}$$

$$10 \leq \sqrt{10(a + b + c + d)} \leq 10\sqrt{3} \mid \cdot 0,3$$

$$3 \leq 0,3\sqrt{10(a + b + c + d)} \leq 3\sqrt{3} \mid : 3$$

$$1 \leq 0,3 \cdot A \leq \sqrt{3} \dots\dots\dots 2p$$

b)

$$\frac{\sqrt{10(a+b+c+d)}}{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b + c + d = 10h^2 \dots\dots\dots 1p$$

$h = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 10$ , avem  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  numere  $\overline{abcd}$  ..... 1p

de la a)  $\Rightarrow 10 \leq a + b + c + d \leq 30 \Rightarrow 10 \leq 10h^2 \leq 30$

$$h = 1 \dots\dots\dots 1p$$



2.

$$\left(\frac{m}{n} - 1\right) + \left(\frac{m+1}{n+1} - 1\right) + \left(\frac{m+2}{n+2} - 1\right) + \dots + \left(\frac{m+2024}{n+2024} - 1\right) = 0 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{m-n}{n} + \frac{m+1-n-1}{n+1} + \frac{m+2-n-2}{n+2} + \dots + \frac{m+2024-n-2024}{n+2024} = 0 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{m-n}{n} + \frac{m-n}{n+1} + \frac{m-n}{n+2} + \dots + \frac{m-n}{n+2024} = 0 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$(m-n) \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+2024} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots 1p$$

Cum  $m$  și  $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+2024} > 0 \quad \dots\dots\dots 1p$

$$m - n = 0 \Rightarrow m = n \quad \dots\dots\dots 1p$$

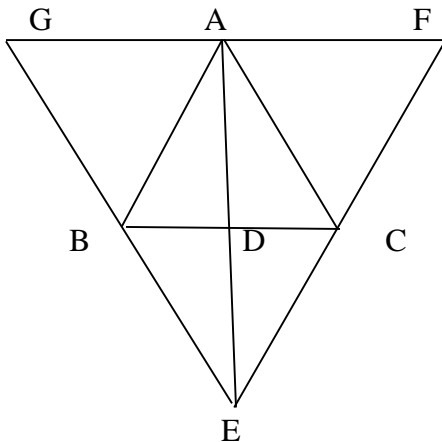
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(m+n+2)^{2024} \cdot 4050}{(m+1)^{2024} + (n+1)^{2024}}} &= \sqrt{\frac{(2m+2)^{2024} \cdot 4050}{2(m+1)^{2024}}} = \sqrt{\frac{2^{2024}(m+1)^{2024} \cdot 2025}{(m+1)^{2024}}} \\ &= \sqrt{2^{2024} \cdot 2025} = 45 \cdot 2^{1012} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

.....1p

3.

a) Desen

.....1p



$$BE = BG$$

$$ED = DA$$

$\Rightarrow BD$  linie mijlocie în triunghiul AGE  $\Rightarrow BD \parallel GA$

.....2p

$$ED = AD$$



$EC = CF$  .....2p

$\Rightarrow DC$  linie mijlocie în triunghiul  $AFE \Rightarrow DC \parallel GF, B, D, C \in BC$

$\Rightarrow BC \parallel GA$

$BC \parallel AF$

$\Rightarrow \overline{G, A, F}$  – coliniare .....1p

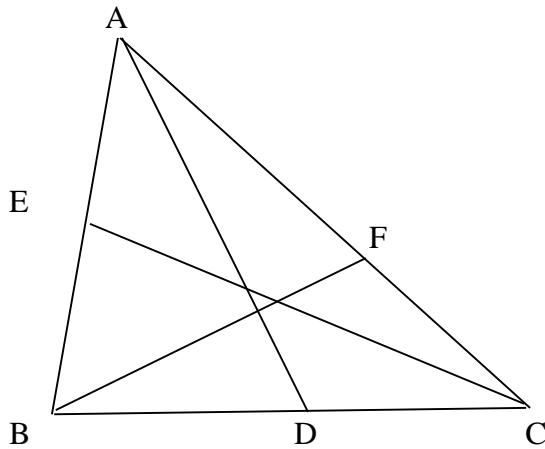
b)  $S = k \cdot T$

$A_{ABC} = S$

$A_{EFG} = T$

$A_{EFG} = A_{EAG} + A_{EAF} = 2 \cdot A_{ABE} + 2 \cdot A_{ACE} = 4 \cdot A_{ABD} + 4 \cdot A_{ADC} = 4(A_{ABD} + A_{ADC}) =$   
 $= 4 \cdot A_{ABC} \Rightarrow T = 4S \Rightarrow k = \frac{S}{T} = \frac{1}{4}$  .....1p

4.  $\sphericalangle BAC = 2 \cdot \sphericalangle BCE = 2 \cdot \sphericalangle CBF = 2 \cdot \sphericalangle BAD = 2 \cdot \sphericalangle DAC$  .....1p



În  $\Delta ABC \Rightarrow$  (teorema bisectoarei)  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$  .....1p

$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle ACB \\ \sphericalangle CAD = \sphericalangle FBC \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{U.U} \\ \Rightarrow \end{array}$   
 $\Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta BFC \Rightarrow \frac{AD}{BF} = \frac{DC}{FC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC \cdot FC = CD \cdot BC$  .....2p



$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle EBC \\ \sphericalangle DAB = \sphericalangle ABD \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{U.U} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta CBE \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BE} = \frac{AD}{CE} \Rightarrow BE \cdot AB = BD \cdot BC \quad \dots\dots\dots 2p$$

Avem

$$AC \cdot FC = CD \cdot BC$$

$$BE \cdot AB = BD \cdot BC$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BE} \cdot \frac{FC}{AB} = \frac{CD}{BD}$$

$$\frac{AC}{AB} \cdot \frac{FC}{BE} = \frac{AC}{AB} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \frac{FC}{BE} = 1$$

$$\Rightarrow CF = BE \quad \dots\dots\dots 1p$$



**Concursul de matematică „Ioan Aron”**  
**clasa a VIII-a - etapa județeană**  
**13 aprilie 2024**  
**BAREM**

1.

a)  $E(x, y) = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + 2022 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow E(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 2022 \geq 2022 \quad (\forall)x, y \in \mathbb{R}$  .....2p  
 $E(x, y) = 2022$  pentru  $x = y = 1$  .....1p

b)  $|x - 2| + |y - 2| = -(x^2 - 2xy + y^2) = -(x - y)^2 \leq 0$  .....2p  
 Deci,  $|x - 2| + |y - 2| = 0 \Rightarrow x = y = 2$  .....1p  
 $E(2, 2) = 2024$  .....1p

2.

a) Fie M – mijlocul segmentului  $[AB]$ .  
 $\Delta AOB$  isoscel,  $OA = OB = 6\sqrt{3}$  cm și  $OM = 6\sqrt{2}$  cm .....1p  
 Dacă  $X \in [AB]$  atunci  $6\sqrt{2} \leq OX \leq 6\sqrt{3}$   
 Adică  $\sqrt{72} \leq OX \leq \sqrt{108}$  .....2p

Lungimea lui  $OX$  este număr natural, deci  $OX \in \{9, 10\}$ , deci avem 4 segmente magice pentru  $X \in [AB]$ . .....1p  
 Deci, cum cubul are 12 muchii, vor exista  $12 \cdot 4 = 48$  de segmente magice .....1p

b) 48 segmente magice și 9 culori distincte și  $48 = 9 \cdot 5 + 3$  rezultă că există cel puțin 6 segmente magice de aceeași culoare. ....2p

3.

a) Folosim:  $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$  .....1p  
 $(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + c^3 + 3(a + b)c(a + b + c)$   
 $= a^3 + b^3 + 3ab(a + b) + c^3 + 3(a + b)c(a + b + c)$   
 $= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(ab + ac + bc + c^2)$   
 $= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)]$   
 $= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$  .....1p

b) Ecuația este echivalentă cu:  
 $(x - 671)^3 + (x - 673)^3 + (x - 679)^3 = (3x - 2023)^3$  .....1p





$$\begin{aligned} (3x - 2023)^3 &= [(x - 671) + (x - 673) + (x - 679)]^3 \\ &= (x - 671)^3 + (x - 673)^3 + (x - 679)^3 \\ &\quad + 3(x - 671 + x - 673)(x - 673 + x - 679)(x - 679 + x - 671) \\ &= (x - 671)^3 + (x - 673)^3 + (x - 679)^3 \\ &\quad + 3(2x - 1344)(2x - 1352)(2x - 1350) \end{aligned}$$

.....3p

Ecuția devine:

$$\begin{aligned} (x - 671)^3 + (x - 673)^3 + (x - 679)^3 \\ &= (x - 671)^3 + (x - 673)^3 + (x - 679)^3 \\ &\quad + 3(2x - 1344)(2x - 1352)(2x - 1350) \end{aligned}$$

de unde

$$(2x - 1344)(2x - 1352)(2x - 1350) = 0 \text{ care are soluțiile } x = 672 \text{ sau } x = 676 \text{ sau } x = 675$$

$$1 + S = 1 + 672 + 676 + 675 = 2024 \quad \text{.....1p}$$

4.

$$1 + b^2 = ab + bc + ca + b^2 = (ab + ac) + (bc + b^2) = a(b + c) + b(c + b) = (b + a)(b + c)$$

.....2p

Analog

$$1 + a^2 = (a + b)(a + c) \text{ și } 1 + c^2 = (c + a)(c + b) \quad \text{.....1p}$$

$$\sqrt{\frac{(1 + b^2)(1 + c^2)}{1 + a^2}} = \sqrt{\frac{(b + a)(b + c)(c + a)(c + b)}{(a + b)(a + c)}} = \sqrt{(b + c)^2} = |b + c| = b + c$$

.....2p

Analog

$$\sqrt{\frac{(1 + c^2)(1 + a^2)}{1 + b^2}} = c + a$$

$$\sqrt{\frac{(1 + a^2)(1 + b^2)}{1 + c^2}} = a + b$$

.....1p

Relația din enunț devine:

$$a(b + c) + b(c + a) + c(a + b) = ab + ac + bc + ba + ca + cb = 2(ab + bc + ca) = 2 \cdot 1 = 2$$

.....1p