COLEGIUL NAȚIONAL
”PREPARANDIA – DIMITRIE ȚICHINDEAL”
Bd. Gen. Dragalina, nr. 5–7, Arad, tel. 0786180502
secretariat@tichindeal.ro, www.tichindeal.ro

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu nr.26, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf arad@isjarad.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

BAREM

Concursul de matematică „Ioan Aron”

clasa a V-a - etapa județeană
6 martie 2023

1. a) $S = 5k + 1 + 5k + 2 + 5k + 3 + 5k + 4$
....1,5p
   $S = 20k + 10 = 10(2k + 1) \vdots 10$
....1,5p

   b) $n = \overline{xy} + \overline{yx} + 3x - 4y = 10x + y + 10y + x + 3x - 4y$
....2p

   n$= 14x + 7y$
....1p

   $n = 7(2x + y)$

   Deci n nu este prim deoarece îl are pe 7 ca divizor propriu.
....1p

2.
$A = 5^{2023} - 5^{2022} = 5^{2022}(5 - 1) = 4 \cdot 5^2 \cdot 5^{2020} = 100 \cdot 5^{2020}$
....2p

$B = 2^{4042} + 2^{4045} + 2^{4046} = 2^{4042}(1 + 8 + 16) = 25 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^{4038}$
$B = 25 \cdot 4 \cdot 2^2 \cdot (2^2)^{2019} = 100 \cdot 4 \cdot 4^{2019} = 100 \cdot 4^{2020}$
....3p

Deci $100 \cdot 5^{2020} > 100 \cdot 4^{2020}$; $A > B$
....2p

3.
$A = 2^n(7 \cdot 16 + 5 \cdot 4) = 132 \cdot 2^n$
....1,5p

$2^n \cdot 132 = (9 \cdot 14 + 6)2^n = 9 \cdot 14 \cdot 2^n + 6 \cdot 2^n$
....1,5p

$A = 9 \cdot 2^n \cdot 14 + 6 \cdot 2^n = B \cdot 14 + 6 \cdot 2^n$
....1p

$6 \cdot 2^n < 9 \cdot 2^n$
....1p

Din teorema împărțirii cu rest se obține: câtul împărțirii numărului A la numărul B este 14, iar restul împărțirii este $6 \cdot 2^n$
....2p

4.
Notăm $b = 2024^2 - 2024 = 2024 \cdot 2023$
....1p

$$N = b(b+2) + 1 = b(b+1+1) + 1 = b(b+1) + (b+1) = (b+1)(b+1) = (b+1)^2$$

....2p

$N = (2024 \cdot 2023 + 1)^2$
....1p

$2024 = M_3 + 2$

$2023 = M_3 + 1$
....1p

$N = \left((M_3 + 2)(M_3 + 1) + 1\right)^2$
....0,5p

$N = (M_3 + 3)^2 = (M_3)^2 = M_9$
....0,5p

$9|N \Rightarrow 9|S(N)$
....1p

BAREM

Concursul de matematică „Ioan Aron”

clasa a VI-a - etapa județeană
6 martie 2023

Subiectul 1

z=50%t=$\frac{50}{100}t=\frac{1}{2}t$..1p
y=75%z=$\frac{75}{100}z$=$\frac{3}{8}t$..1p
z=50%y=$\frac{50}{100}y$=$\frac{3}{16}t$..1p
Se înlocuieşte şi se obţine $\frac{31}{8}t$=930...2p
Se finalizează t=240, z=120, y=90, x= 45...2p

Subiectul 2

Presupunem că 2^{2007} poate fi scris ca sumă de numere naturale consecutive.........1p
Avem x+(x+1) +(x+2)+...+$[x+(n-1)]$= 2^{2007}...1p
Se ajunge la n(2x+n-1)= 2^{2008}..2p
Se ia cazul n=par, de unde 2x+n-1 este impar, fals...1p
Se ia cazul n=impar, primul factor impar, imposibil..1p
Se finalizează, presupunerea făcută este falsă...1p

Subiectul 3

Numărul iniţial de cercuri este 20+21+22=63 impar..1p
La fiecare pas numărul de cercuri scade cu 1...1p
Pentru a ajunge la un singur cerc avem nevoie de 62 paşi..1p
La fiecare pas se modifică paritatea numărului de cercuri din fiecare culoare.....................1p
După un număr par de paşi, 62, paritatea numărului de cercuri de fiecare culoare este aceeaşi ca şi cea de la început, impară...2p
Cercul rămas este roşu...1p

Subiectul 4

Se notează cu 2a şi2b măsurilor unghiurilor şi se scrie relaţia:
5 [180^0-(2a+2b)]=180^0-2a+180^0-2b..2p
Ajunge la 8a+8b=540^0..3p
Finalizează, unghiul făcut de bisectoare este a+b=$67^0 30'$...2p

BAREM

Concursul de matematică „Ioan Aron”

clasa a VII-a - etapa județeană

6 martie 2023

Subiectul 1

a) (i) Calculează şi finalizează...1p

(ii)Calculează şi finalizează...1p

b) $a^2+b^2+c^2+d^2= a^2+2ad+b^2+c^2-2ab+d^2= (a+d)^2+ b^2+c^2-2(b^2+c^2+bc)=$
$(a+d)^2-(b+c)^2=(a+d+b+c)(a+d-b-c)$...2p
Dacă $a+d-b-c=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2= a+d+b+c$ 1p
Dar $a^2\geq a$, $b^2\geq b$, $c^2\geq c$, $d^2\geq d \Rightarrow a=b=c=d=1$ fals.......................................1p
$\Rightarrow a+d-b-c\geq 2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2$ compus...1p

Subiectul 2

a) În triunghiul ABD$\xrightarrow{T\ bis}\frac{DM}{MB}=\frac{AD}{AB}$ şi în triunghiul ADC $\xrightarrow{T\ bis}\frac{AN}{NC}=\frac{AD}{DC}$, AB=DC$\Rightarrow\frac{DM}{MB}=\frac{AN}{NC}$,
$DM\cdot NC=AN\cdot MB$...3p

b) Din $\frac{DM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ ajunge la $\frac{DM}{DB}=\frac{AN}{AC}$..1p
$\frac{DM}{2DO}=\frac{AN}{2AO} \Rightarrow \frac{DM}{DO}=\frac{AN}{AO} \xrightarrow{RT\ Th}$ MN|| AD $\Rightarrow$ ADMN trapez...1p
Fie $AM\cap DN=\{E\}$
ABCD paralelogram m(∢ADC)+ m(∢DAB)=180^0,finalizează : m(∢AED) =180^0- [m(∢ADE)+ m(∢DAE)]= 180^0- $\frac{m(∢ADC)+m(∢DAB)}{2}$ =90^0 $\Rightarrow$ AM$\perp$DN....................2p

Subiectul 3

a) GD||AB $\xrightarrow{TFA}$ $\Delta ODG\sim\Delta OBA \Rightarrow \frac{OD}{OB}=\frac{OG}{OA}$..1p
GE||AC $\xrightarrow{TFA}$ $\Delta OGE\sim\Delta OAC \Rightarrow \frac{OE}{OC}=\frac{OG}{OA}$...1p
$\Rightarrow$OD=OE, OG=OH $\Rightarrow$GEHD paralelogram..1p

b) În triunghiul ABC, G=centrul de greutate , DO=OE$\Rightarrow$AO mediană în triunghiul ADE$\Rightarrow$G centrul de greutate în triunghiul ADE$\Rightarrow$ DG=2GM........................1,5p
În triunghiul BGH $\Rightarrow$ D centrul de greutate $\Rightarrow$ DG= 2ND..............................1,5p
Finalizează MN=ND+DQ+GM=2GD..1p

Subiectul 4

$\frac{a}{\overline{bc}+1} = \frac{\overline{bc}}{100}$ $\Rightarrow$ 100a $=\overline{bc}(\overline{bc}+1)$...2p

$\overline{bc}$ $și$ $(\overline{bc}+1)$ sunt numere consecutive, deci sunt prime intre ele, nu pot fi simultan divizibile cu 5

$\Rightarrow 25 \mid \overline{bc}$ sau $25 \mid (\overline{bc}+1)$..2,5p

Dacă $\overline{bc}$ = 25 , a$\notin$N...0,5p

Dacă $\overline{bc}$ +1= 25 $\Rightarrow$ $\overline{bc}$ = 24 , a=6 , $\overline{abc}$=624...1p

Dacă $\overline{bc}$ = 50 , a$\notin$N...0,5p

Dacă $\overline{bc}$ +1= 50 $\Rightarrow$ $\overline{bc}$ = 49 , a$\notin$N..0,5p

BAREM

Concursul de matematică „Ioan Aron”

clasa a VIII-a - etapa județeană

6 martie 2023

1.

a) $E(x) = x^2 + 7x + 12$, $(\forall) x \epsilon \mathbb{R}$.

……………………………………………………………………………………………..1p

$$E(x) + \frac{1}{4} = x^2 + 7x + \frac{49}{4} = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 \geq 0; (\forall) x \epsilon \mathbb{R};$$

……………………………………………………………………………………………..2p

b) $E(x) = (x+3)(x+4)$, $(\forall) x \epsilon \mathbb{R}$

……………………………………………………………………………………………..1p

$$A = \frac{1}{E(-2)} + \frac{1}{E(-1)} + \frac{1}{E(0)} + \cdots + \frac{1}{E(2023)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2026 \cdot 2027} = \frac{2026}{2027}$$

……………………………………………………………………………………………..2p

$[A] = 0$

……………………………………………………………………………………………..1p

2. a) $\frac{x^2+1}{x} = \sqrt{2n+1}$ se scrie $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2n+1}$, de unde $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2n - 1$

……………………………………………………………………………………………..1p

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 4n^2 - 4n - 1$$

……………………………………………………………………………………………..1p

$\frac{x^8+(8n+2)x^4+1}{x^4} = x^4 + \frac{1}{x^4} + 8n + 2 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 \in \mathbb{N}$ p.p.

……………………………………………………………………………………………..1p

b)Ecuația se scrie

$$\left(2x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) + \left(5y^2 + 5y + \frac{5}{4}\right) + \left(z^2 - 3z + \frac{9}{4}\right) = 0$$

……………………………………………………………………………………………..2p

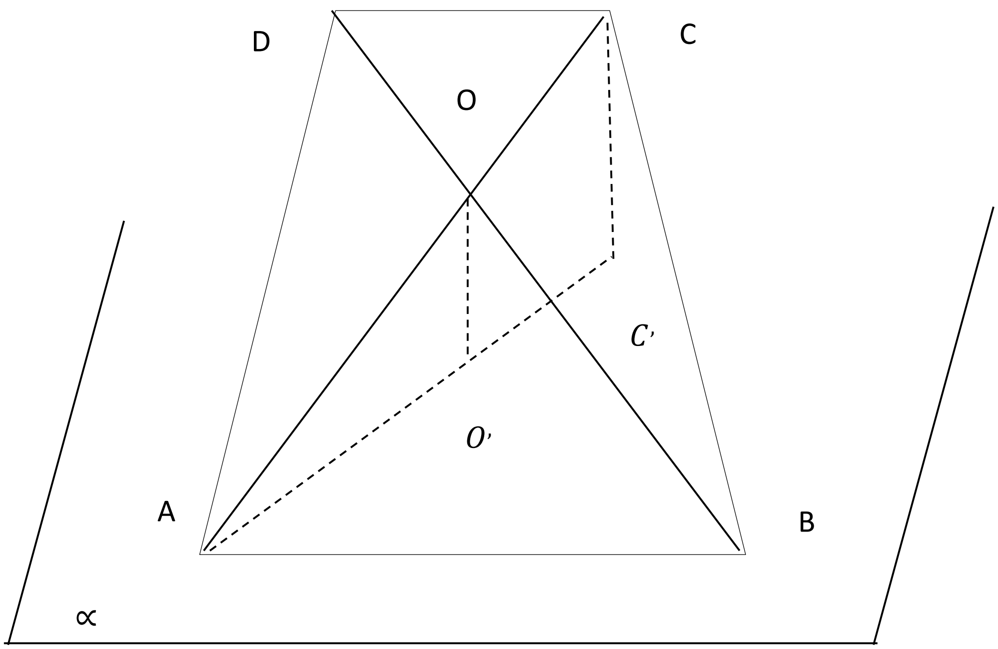
$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+5\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=0$$

……………………………………………………………………………………………..1p

De aici, obținem $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$ și $z=\frac{3}{2}$

……………………………………………………………………………………………..1p

3.



Fie $O' = pr_{\propto}O$; $C' = pr_{\propto}C$

……………………………………………………………………………………………..1p

$$\Delta BOA \sim \Delta DOC \Rightarrow \frac{OA}{OC}=\frac{BA}{DC}=\frac{13}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{AC}=\frac{13}{18}$$

……………………………………………………………………………………………..2p

$$\left.\begin{array}{l} OO' \perp \propto \\ CC' \perp \propto \end{array}\right\} \Rightarrow OO' \parallel CC' \Rightarrow \Delta AOO' \sim \Delta ACC' \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{OO'}{CC'} = \frac{AO}{AC} = \frac{13}{18}$

……………………………………………………………………………………………..2p

$\frac{OO'}{54} = \frac{13}{18} \quad \Rightarrow OO' = 39\ cm$

……………………………………………………………………………………………..2p

4. a)

$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{2} \geq \frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$

……………………………………………………………………………………………..2p

b) Inegalitatea de la a) se mai scrie:

$2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$

……………………………………………………………………………………………..1p

Fie:

$x = \sqrt{2023+a} \geq 0$

$y = \sqrt{2023+b} \geq 0$

Obținem

$2\left[\left(\sqrt{2023+a}\right)^2 + \left(\sqrt{2023+b}\right)^2\right] \geq \left(\sqrt{2023+a} + \sqrt{2023+b}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(2023+a+2023+b) \geq \left(2\sqrt{2023+c}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(2\cdot 2023+a+b) \geq 4(2023+c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\cdot 2023 + 2(a+b) \geq 4\cdot 2023 + 4c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(a+b) \geq 4c \Leftrightarrow a+b \geq 2c$

……………………………………………………………………………………………..4p