Concursul de matematică „Ioan Aron”

clasa a III-a - etapa regională

6 mai 2023

BAREM

1. Aflați suma a patru numere *a*, *b*, *c* și *d*, dacă *a* este cu 26 mai mic decât *b*; *b* este cu 205 mai mic decât suma dintre *c* și *d*; *c* este cu 148 mai mare decât *d*, iar *d* este cu 24 mai mare decât dublul numărului 32.

32 x 2 = 64 (dublul lui 32)	1 p
64 + 24 = 88 (d)	1 p
88 + 148 = 236 (c)	1 p
236 + 88 = 324 (suma c+d)	1 p
324 – 205 =119 (b)	1 p
119 -26 = 93 (a)	1 p
93 + 119 +236 + 88 = 536	1 p

TOTAL: 7 puncte

2. a) Calculați:

103 – 91 : 7 + 28 x (50 – 10 x 3) =
= 103 – 13 + 28 x (50 – 30) =
= 90 + 28 x 20 =
= 90 + 560 =
= 650

3 puncte (6 operații a câte 0,50 p.)

b) Două stilouri costă cât patru pixuri, iar şapte pixuri costă 14 de lei. Ce rest a primit Mihai de la o bancnotă de 50 de lei, dacă a cumpărat un stilou şi un pix?

14 lei : 7 = 2 lei (un pix)	(1 punct)
2 lei x 4 = 8 lei (două stilouri /patru pixuri)	(1 punct)
8 lei : 2 = 4 lei (un stilou)	(1 punct)
2 lei + 4 lei = 6 lei (un stilou şi un pix)	(0,5 puncte)
50 lei – 6 lei = 44 lei (rest)	(0,5 puncte)

4 puncte

TOTAL: 7 puncte

3. Șiragul Irinei are mărgele roșii, galbene și albastre. Numărând mărgelele roșii și galbene obținem 22. Numărând pe cele galbene și albastre obținem 24, iar dacă numărăm pe cele roșii și albastre obținem 16.
Câte mărgele sunt de fiecare culoare?
r + g = 22
g + a= 24
r + a = 16
22+24+16 = 62 (dublul numărului de mărgele) 2puncte
62 :2 = 31 (numărul total de mărgele) 2puncte
31 – 22 = 9 (mărgele albastre) 1punct
31 – 24 = 7 (mărgele roșii) 1punct
31 – 16 = 15 (mărgele galbene) 1punct
TOTAL:7 puncte

4. Pentru a înfrumuseța un parc, pe o alee de 40 de metri se plantează pe ambele părţi panseluțe galbene şi roşii. Între două panseluțe galbene se plantează 7 panseluțe roşii. Distanţa dintre panseluțe este de 1m.

a) Câte panseluțe din fiecare culoare s-au plantat dacă pe fiecare parte a aleii, prima şi ultima panseluță sunt galbene?

a) 3,5 puncte

7+1=8 (flori într- o grupă) (0,5 puncte)
1m x 8=8m (ocupă o grupă de 7 panseluțe roșii și una galbenă) (0,5 puncte)
40m : 8m=5 (grupe) (0,5 puncte)
5x7=35 (panseluțe roșii pe o parte) (0,5 puncte)
5 x1+1=6 (panseluțe galbene pe o parte) (0,5 puncte)
35x2=70 (panseluțe roșii în total) (0,5 puncte)
6x2=12 (panseluțe galbene în total) (0,5 puncte)

b) Pentru achiziționarea tuturor panseluțelor s-a plătit suma de 88 lei, iar diferența dintre suma destinată panseluțelor roșii și suma destinată panseluțelor galbene reprezintă două treimi din suma destinată panseluțelor galbene. Cât au costat panselutele galbene? Dar cele roșii?

b) 3,5 puncte

g /____/____/____/

r /____/____/____/___/____/

88 lei (0,5puncte)

88lei: 8=11 lei (g-3 / r-5) (1 punct)

11leix 3=33lei (suma destinată panseluțelor galbene) (1 punct)

11leix 5=55lei (suma destinată panseluțelor roșii) (1 punct)

TOTAL:7 puncte

COLEGIUL NAȚIONAL
”PREPARANDIA – DIMITRIE ȚICHINDEAL
Bd. Gen. Dragalina, nr. 5–7, Arad, tel. 0786180502
secretariat@tichindeal.ro, www.tichindeal.ro

ISJ ARAD
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu nr.26, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isiarad.ro e-mail: inf arad@isiarad.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Concursul de matematică „Ioan Aron”
clasa a IV-a - etapa regională
6 mai 2023
BAREM

1. $94\,326 - \underline{123 \times 8} : [\underline{848 : 4} - (a \times 100 + \underline{5 \times 2})] + \underline{838\,149 : 3} = 373\,217$ **1 pc.**

$94\,326 - 984 : \underbrace{[212 - (a \times 100 + 10)]}_{\boldsymbol{m}} + 279\,383 = 373\,217$ **1 pc.**

$94\,326 - 984 : \boldsymbol{m} + 279\,383 = 373\,217$ 0,5 pc x 6 = **3 pc.**

$94\,326 - 984 : \boldsymbol{m} = 373\,217 - 279\,383$

$94\,326 - 984 : \boldsymbol{m} = 93\,834$

$984 : \boldsymbol{m} = 94\,326 - 93\,834$

$984 : \boldsymbol{m} = 492$

$\boldsymbol{m} = 984 : 492$

$\boldsymbol{m} = 2$

$212 - (a \times 100 + 10) = 2$ 0,5 pc x 4 = **2 pc.**

$a \times 100 + 10 = 212 - 2$

$a \times 100 + 10 = 210$

$a \times 100 = 210 - 10$

$a \times 100 = 200$

$a = 200 : 100$

$\mathbf{a = 2}$

Total 7p

2. Ioana a folosit pentru realizarea a 6 brățări și 8 coliere, 560 de mărgele, iar pentru 10 brățări și 6 coliere, 552 de mărgele. Câte mărgele va folosi pentru realizarea a 4 brățări și 5 coliere?

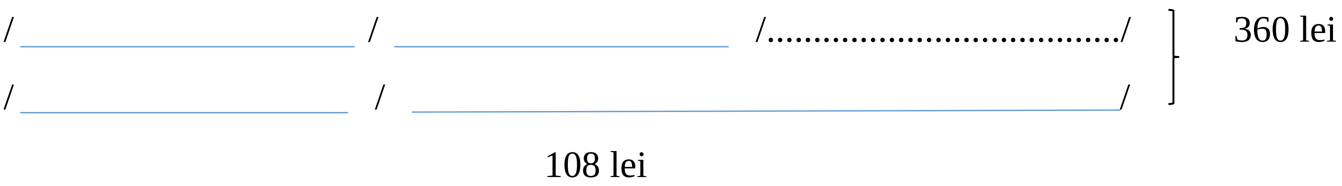
6 brătări.......8 coliere........560 mărgele..1 punct
10 brătări.......6 coliere........552 mărgele

18 brătări.......24 coliere........560x3 mărgele=1680..1 punct
40 brătări.......24 coliere........ 552x4 mărgele=2208

22 brătări......./ coliere........2208-1680=528 mărgele...1 punct
1 brățara.......528:22=24 mărgele..1 punct
8 coliere.......560-6x24=416 mărgele...1 punct
1 colier..........416:8=52 mărgele...1 punct
24x4+52x5=356 mărgele ....1 punct

Total 7p

3. Într-o librărie sunt două pachete cu același număr de caiete, în valoare totală de 360 de lei. Din primul pachet se vând 12 caiete, iar din al doilea, caiete în valoare de 108 lei. Știind că în primul pachet au rămas de 2 ori mai multe caiete decât în al doilea, aflați câte caiete erau în fiecare pachet și care este prețul unui caiet.



1p

360:2=180 lei(costul unui pachet)……………………1p

180-108=72 lei (costul caietelor rămase în pachetul al doilea).........1p

72x2=144 lei(costul caietelor din pachetul 1)................................1p

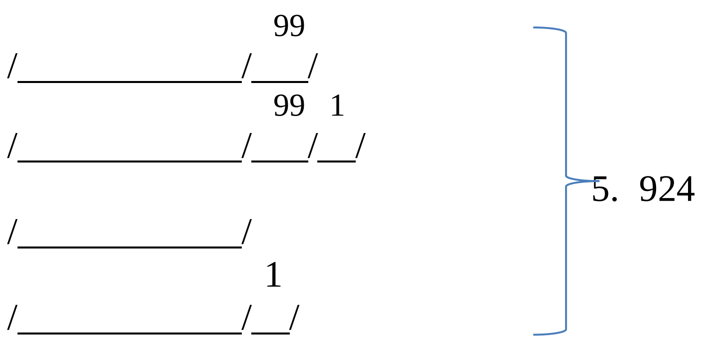
180-144=36 lei(costul celor 12 caiete)..1p

36:12=3 lei (costul unui caiet)...1p

180:3=60 (numărul de caiete din fiecare pachet).............................1p

Total 7p

4. a) Suma a patru numere este 924. Primul şi al doilea, respectiv al treilea şi al patrulea sunt numere consecutive, iar diferenţa dintre al doilea şi al treilea este 100. Aflaţi cele patru numere.



0,5 p

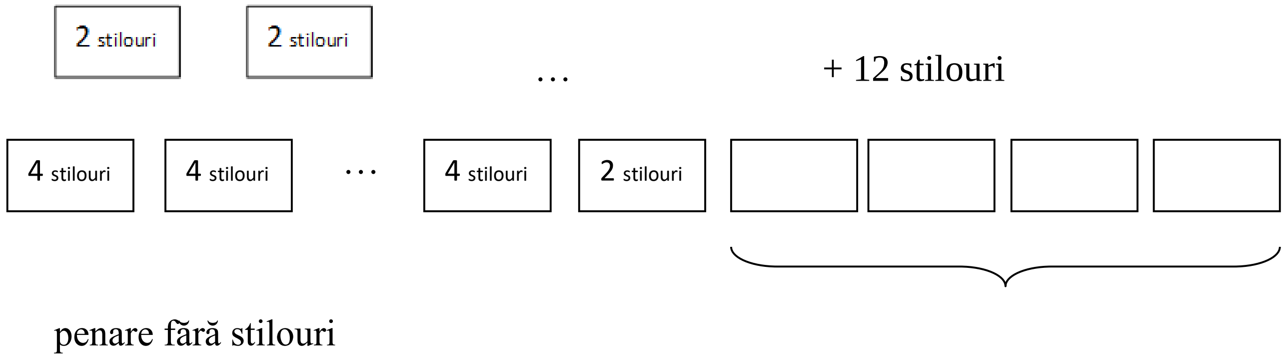
924 – (99 + 99 + 1 + 1) = 924 – 200 = 724	0,5 p
724 : 4 = 181 (valoarea unui segment) (al treilea număr)	0,5 p
181 + 1 = 182 (al patrulea număr)	0,5 p
181 + 99 = 280 (primul număr)	0,5
280 + 1 = 281 (al doilea număr)	0,5 p

COLEGIUL NAȚIONAL
”PREPARANDIA – DIMITRIE ȚICHINDEAL
Bd. Gen. Dragalina, nr. 5–7, Arad, tel. 0786180502
secretariat@tichindeal.ro, www.tichindeal.ro

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu nr.26, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isiarad.ro e-mail: inf arad@isiarad.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

b)Dacă sunt două stilouri într-un penar, atunci rămân 12 stilouri pe masă. Dacă sunt câte patru stilouri într-un penar, atunci rămân 4 penare goale și un penar cu 2 stilouri. Câte penare și câte stilouri sunt?



Cele 12 stilouri rămase completează **6 penare** cu 2 stilouri (12 : 2 = 6)

⇨ **6 penare** cu câte 4 stilouri **1 punct**

Cele 4 penare goale conțineau 4 x 2 = 8 stilouri care au completat 8 : 2 = 4 penare

⇨ **4 penare** cu câte 4 stilouri **1 punct**

⇨ 6 penare + 4 penare + 1 penar (cu 2 stilouri) + 4 penare (goale) = **15 penare** **1 punct**

⇨ 6 x 4 stilouri + 4 x 4 stilouri + 2 stilouri = **42 stilouri** **1 punct**

R: 15 penare
42 stilouri

Total 7p

Concursul de matematică „Ioan Aron”
clasa a V-a - etapa regională
6 mai 2023
BAREM

1.

$$\left.\begin{array}{ll} a = b \cdot c + r & (1) \\ r < b & \\ c = \dfrac{b}{2} & \\ r = \dfrac{c}{4} & \\ b + c + r = 117 & (2) \end{array}\right]$$

……………………………………..1p

……………………………………..1p

Din $c = \frac{b}{2}$, $r = \frac{c}{4} \Rightarrow r = \frac{b}{8}$ ……………………………………..2p

din (2) $\Rightarrow b + \frac{b}{2} + \frac{b}{8} = 117 \Rightarrow 8b + 4b + b = 8 \cdot 117$

$13b = 117 \cdot 8$

$b = 9 \cdot 8 = 72$ ……………………………………..2p

$a = 72 \cdot \dfrac{72}{2} + \dfrac{72}{8}$

$a = 72 \cdot 36 + 9$

$a = 2601$ ……………………………………..1p

2. Fie L lungimea saltului broscuței. Atunci lungimea saltului greierului este $\frac{85}{100}L$

……………………………………..2p

La fiecare pas al broscuței greierele parcurge $\frac{120}{100} \cdot \frac{85}{100}L$, adică $\frac{51}{50}L$

……………………………………..2p

În concluzie, în timpul în care broscuța face un salt de lungime L, greierele parcurge o distanță egală cu $\frac{51}{50}L$ (deci mai mare decât cea parcursă de broscuță).

……………………………………..2p

Greierele va câștiga sprintul.

……………………………………..1p

3.

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 2022 \cdot 2023 + (2023 \cdot 2024) : 2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + +2022^2 + 2023^2$

....3p

A = 1 ....1p

b)

$B = 2^{2024}$ 2p

$B = (2^{1012})^2$ pătrat perfect 1p

4. Condiția din ipoteză se transcrie $3^{n+1} - 3^n - 1 = 1 + 2^{n+2}$, adică $3 \cdot 3^n - 3^n = 2 + 2^2 \cdot 2^n$

……………………………………..2p

deci $2 \cdot 3^n = 2\left(1 + 2 \cdot 2^n\right)$ sau $3^n = 1 + 2 \cdot 2^n$.

……………………………………..1p

Observăm că $n = 0$ și $n = 1$ nu corespund și $n = 2$ verifică ecuația.

……………………………………..2p

Dacă, prin absurd, ar exista $n \geq 3$ care verifică ecuația, atunci

$3^n = 9 \cdot 3^{n-2} = 3^{n-2} + 8 \cdot 3^{n-2} > 1 + 8 \cdot 2^{n-2} = 1 + 2 \cdot 2^n$, contradicție.

……………………………………..1p

Rămâne că $n = 2$ este soluție unică.

……………………………………..1p

Concursul de matematică „Ioan Aron”
clasa a VI-a - etapa regională
6 mai 2023
BAREM

1. Aflați numărul natural $\overline{abc}$ știind că 7 este cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{ab6}$, $\overline{b1c}$ și $\overline{4ca}$.

BAREM:

7 este divizor comun rezultă $100a + 10b + 6 \vdots 7$, $100b + 10 + c \vdots 7$ și $400 + 10c + a \vdots 7$ 1p

$100 = M_7 + 2$, $10 = M_7 + 3$, iar $400 = M_7 + 1$, rezultă 7 divide $2a + 3b + 6$, $2b + c + 3$ și $a + 3c + 1$ 1p

Atunci 7 divide și $2(2a + 3b + 6) – 3(2b + c + 3) + (a + 3c + 1) = 5a + 4$ 1p

Rezultă $a = 2$ sau $a = 9$ 1p

$a = M_7 + 2$, iar $2a + 3b + 6 = M_7$ și $2b + c + 3 = M_7$ implică $b = M_7 + 6$ și $c = M_7 + 6$, adică $b = c = 6$ 1p

pentru 266 cele trei numere din enunț sunt pare, deci 7 nu este c.m.m.d.c. al lor 1p

pentru 966 sunt satisfăcute condițiile din enunț 1p

2. Vom spune că numerele naturale *a*, *b* și *c*, cu $a < b < c$, *sunt atrase de numărul natural* $k \geq 2$, dacă ele sunt direct proporționale cu trei puteri consecutive ale lui k . Spunem că cele trei numere *sunt respinse de* k dacă sunt invers proporționale cu trei puteri consecutive ale lui k .

a) Împărțiți numărul 1001 în părţi atrase de k .

b) Dacă trei numere sunt atrase de k , atunci acestea sunt, de asemenea, respinse de k .

BAREM:

a) Fie $n \in N$. Avem $\frac{a}{k^n}=\frac{b}{k^{n+1}}=\frac{c}{k^{n+2}}=\frac{a+b+c}{k^n+k^{n+1}+k^{n+2}}=\frac{1001}{k^n\left(1+k+k^2\right)}$, deci $a=\frac{1001}{1+k+k^2} \in N$
....1p

Obținem $1+k+k^2 \in \{7,11,13,77,91,143,1001\}$, prin urmare $k(k+1) \in \{6,10,12,76,90,142,1000\}$
....2p

așadar $k \in \{2,3,9\}$. Pentru $k=2$ avem $a=143, b=286, c=572$
....1p
pentru $k=3$ avem $a=77, b=231, c=693$; pentru $k=9$ avem $a=11, b=99, c=891$.
....1p
b) Dacă există $k \in N^*$ cu proprietatea $\frac{a}{k^n}=\frac{b}{k^{n+1}}=\frac{c}{k^{n+2}}$, atunci $a\cdot k^2=b\cdot k^1=c\cdot k^0$, deci cele trei numere sunt respinse de k.
....2p

3. În ΔABC avem că $BC=2AB$ și $\hat{B}=2\hat{C}$. Demonstrați că $\hat{A}=90°$.

Prof. Mihai Opincariu, Brad

BAREM

Fie D mijlocul lui $[BC]$. Cum $BC=2AB$ vom avea că triunghiul ABD este isoscel.

Fie E piciorul bisectoarei din B în ΔABC. Cum $B=2C$ vom avea că triunghiul BCE este isoscel și atunci va rezulta că mediana ED este înălțime, deci $\measuredangle BDE=90°$
………………………………...………………………………...3p.

Pe de altă parte avem că $\Delta BDE \equiv \Delta BAE$ $(L.U.L.)$, deci $\measuredangle BDE=\measuredangle BAE$
………………………………...………………………………...3p.

Obținem cerința.
………………………………...………………………………...1p.

4. Prin mijlocul M al laturii $[BC]$ a triunghiului ABC se construieşte paralela la AB, care intersectează înălţimile din A, B şi C în D, E respectiv F şi paralela la AC, care intersectează înălţimile din A, B şi C în N, P respectiv Q. Să se arate că CD, BN şi EQ sunt paralele.

BAREM:

Fie H ortocentrul $\triangle ABC$. În $\triangle BHM$ avem MP, HD înălţimi, deci N este ortocentru şi atunci rezultă că $BN \perp HM$

....2p

. În $\triangle DHC$ avem DF, CB înălţimi, deci M este ortocentru şi rezultă că $HM \perp DC$

....2p

În $\triangle QME$, EH şi QF sunt înălţimi, deci H este ortocentru şi $MH \perp QE$

....2p

obţinem. $DC \parallel BN \parallel QE$

....1p

COLEGIUL NAȚIONAL
”PREPARANDIA – DIMITRIE ȚICHINDEAL”
Bd. Gen. Dragalina, nr. 5–7, Arad, tel. 0786180502
secretariat@tichindeal.ro, www.tichindeal.ro

ISJ ARAD
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu nr.26, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isiarad.ro e-mail: inf arad@isiarad.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Concursul de matematică „Ioan Aron”
clasa a VII-a - etapa regională
6 mai 2023

1. Demonstraţi că: $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+....+\frac{n+2}{n(n+1)}-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...\frac{1}{n})<2$, $(\forall)n\in \mathbb{N}^*-\{1\}$.

Problemă selectată de județul Bihor

BAREM:

$\frac{n+2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}$, $(\forall)$ $n\in \mathbb{N}^*\Rightarrow$

.... 2p

$\Rightarrow \frac{2}{1}-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+ \ \dots +\frac{2}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}\right)=$

.... 2p

$=2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n+1}<2$.

.... 3p

2. Raul a ales două dintre numerele de la 1 la 17, inclusiv, și le-a înmulțit. În mod surprinzător, produsul celor două numere s-a dovedit a fi egal cu suma celorlalte 15 numere. Aflați cele două numere alese de Raul.

Problemă selectată de:
Prof. Liliana Roman, Scoala Gimnazială Nr.30, Timișoara
Prof. Sebastian Gheorghiță, Liceul ,,C. Brediceanu", Lugoj

BAREM:

Notăm cu a și b cele două numere, atunci a·b=(1+2+3+⋯+17)-a-b

....1p

a·b+a+b=153

....1p

a·b+a+b+1=154

....1p

a·(b+1)+(b+1)=(a+1)·(b+1)

....1p

$a+1, b+1 \in \{2,3,\ldots,18\}$ 1p

$(a+1)(b+1)=154 \Rightarrow a+1$ şi $b+1$ sunt 11 şi 14 ....1p

$a=10$, $b=13$ 1p

3. Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctele M, N mijloacele laturilor $[AB]$ şi respectiv $[BC]$. Dacă punctul P este intersecţia dreptelor AN şi DM, iar punctul Q este mijlocul segmentului $[DP]$, demonstraţi că punctul P este centrul de greutate al triunghiului ABQ.

Problemă selectată de județul Bihor

BAREM:

Fie E mijlocul segmentului $[AD]$ şi $\{F\} = AN \cap BQ$.

....1p

În triunghiul DAP, $[EQ]$ este linie mijlocie, deci $EQ \parallel AP$ (1).

.... 1p

Patrulaterul $AECN$ este paralelogram, deoarece $AE = CN$ şi $AE \parallel CN$

....1p

Deducem astfel că $EC \parallel AN$ (2).

....1p

Din (1) şi (2) rezultă că punctele E, Q, C sunt coliniare

....1p

Prin urmare, $FN \parallel QC$ de unde, ţinând cont că N este mijlocul segmentului $[BC]$, rezultă că $[FN]$ este linie mijlocie în triunghiul BQC. Deducem că F este mijlocul segmentului $[BQ]$.

....1p

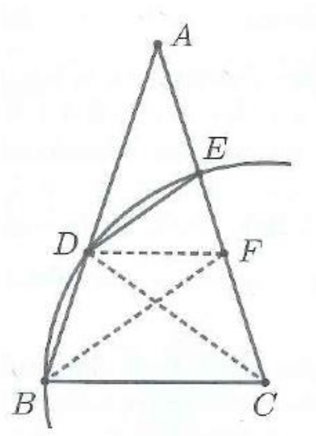
Deci, punctul P este centrul de greutate al triunghiului ABQ, deoarece se află la intersecţia medianelor $[QM]$ şi $[AF]$.

....1p

4. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$ și $m(\sphericalangle BAC) = 36°$. Pe laturile AB și AC se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $AD = BC = CE$. Demonstrați că:
a) punctele B,D și E se află pe un cerc cu centrul în C;
b) triunghiul EAD este isoscel

problemă preluată din Gazeta Matematică

BAREM:



a)

Fie $(BF, F \in AC$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$. Atunci $m(\sphericalangle FBA) = m(\sphericalangle FAB) = 36°$, deci $AF = FB$
În plus $m(\sphericalangle CFB) = m(\sphericalangle FAB) + m(\sphericalangle FBA) = 72° = m(\sphericalangle BCF)$ deci $BF = BC$

....2p

Deducem că $AF = BF = BC = AD$ deci triunghiul DAF este isoscel, prin urmare $DF \parallel BC$,

deci BCFD este trapez isoscel.
....2p

Rezultă că $CD = BF = BC = CE$ adică punctele B, D, E sunt egal depărtate de C, de unde concluzia.
....1p

b) Deoarece $\triangle BCD = \triangle ECD$ (LUL) rezultă $DE = BD = AB - AD = AC - CE = AE$
....2p

Concursul de matematică „Ioan Aron”
clasa a VIII-a - etapa regională
6 mai 2023
BAREM

1. Să se rezolve ecuaţia $[x] + 3\cdot\{x\} = 2023$, unde prin $[x]$ şi $\{x\}$ se notează partea întreagă şi respectiv partea fracţionară a lui x.

Problemă propusă de
Prof. Liliana Roman, Scoala Gimnazială Nr.30, Timișoara
şi Prof. Sebastian Gheorghiță, Liceul ,,C. Brediceanu", Lugoj

BAREM:
[x] şi 2023 sunt numere întregi deci 3{x} este întreg.

…………………………………………………………………………………………………1p

$0\le \{x\}<1 \mid \cdot 3 \Rightarrow 0\le 3\{x\}<3$
…………………………………………………………………………………………………1p

Rezultă că $3\{x\} \in \{0, 1, 2\}$
…………………………………………………………………………………………………1p

$\{x\} \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$
…………………………………………………………………………………………………1p

Soluţiile sunt : $x_1 = 2023$
…………………………………………………………………………………………………1p

$x_2 = 2022 + \frac{1}{3}$
…………………………………………………………………………………………………1p

$x_3 = 2021 + \frac{2}{3}$
…………………………………………………………………………………………………1p

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ ab+bc+ca+a=7 \end{cases}$$

Prof. Mihai Opincariu, Brad

BAREM:

Din prima ecuație obținem $a = 4 - b - c$ care înlocuită în cea de a doua ecuație dă:

$ab + bc + ca = 3 + b + c \;\Big|\; \cdot 2 \;\Leftrightarrow\; a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) = 6 + 2b + 2c \;\; (1)$.

....3p

Tot din prima ecuație avem $b + c = 4 - a$, $c + a = 4 - b$, $a + b = 4 - c$

care înlocuite în relația (1) duc la:

$a(4-a) + b(4-b) + c(4-c) = 6 + 2b + 2c \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; 4a - a^2 + 4b - b^2 + 4c - c^2 = 6 + 2b + 2c \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; a^2 - 4a + 4 + b^2 - 2b + 1 + c^2 - 2c + 1 = 0 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 0$

....3p

de unde se obține $a = 2$; $b = c = 1$, soluții care verifica ecuațiile sistemului.

....1p

3.

a) Să se demonstreze că dacă $a, b \in (0,1]$ atunci $ab + 1 \geq a + b$.

b) Să se demonstreze că dacă $a, b, c \in (0,1]$ atunci

$$\frac{a+b+c}{2} + \frac{1}{ab+1} + \frac{1}{ac+1} + \frac{1}{bc+1} \geq 3.$$

Problemă propusă de
Chișiu Gabriela, Bihor

BAREM:

a) Inegalitatea se scrie echivalent $(a-1)(b-1) \geq 0$

....2 p

b) $\frac{a+b+c}{2} + \frac{1}{ab+1} + \frac{1}{ac+1} + \frac{1}{bc+1} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2} \geq 1 - \frac{1}{ab+1} + 1 - \frac{1}{ac+1} + 1 - \frac{1}{bc+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+b+c}{2} \geq \dfrac{ab}{ab+1} + \dfrac{ac}{ac+1} + \dfrac{bc}{bc+1}$

....2 p

Dar $\frac{2ab}{ab+1} \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$ $(M_h \leq M_a)$ deci $\frac{ab}{ab+1} \leq \frac{a+b}{4}$

……………………………………………………………………………1 p

Astfel $\frac{ab}{ab+1}+\frac{ac}{ac+1}+\frac{bc}{bc+1}\le\frac{a+b}{4}+\frac{a+c}{4}+\frac{b+c}{4}$ de unde $\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{ab}{ab+1}+\frac{ac}{ac+1}+\frac{bc}{bc+1}$
care este echivalentă cu inegalitatea cerută

……………………………………………………………………………2 p

4. *Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată. Fie $M\in(VA)$, $N\in(VB)$, $P\in(VC)$ și $Q\in(VD)$ astfel încât $AM=BN=VP=VQ$.*

a) *Să se arate că punctele M,N,P,Q sunt coplanare;*

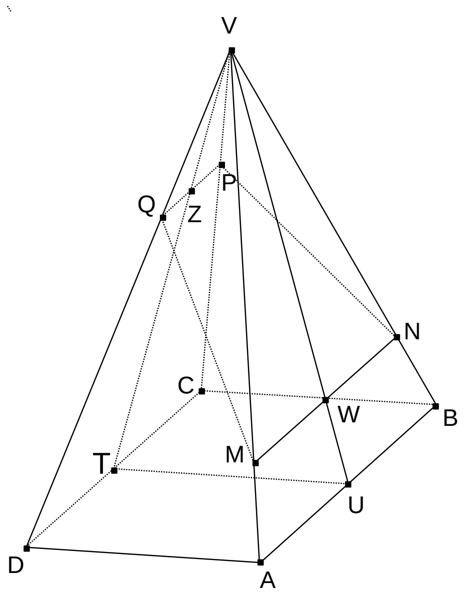
b) *Să se arate că $A_{MNPQ}\ge\frac{1}{4}A_{ABCD}$.*

Monea Mihai şi Steluţa – Deva

BAREM:

a) Se demonstrează că $QP\parallel CD$ şi $MN\parallel AB$, de unde rezultă că $MN\parallel QP$, deci M,N,P,Q sunt coplanare.

………………………………………………………………………………….2p



b) $MNQP$ - trapez isoscel.

$\frac{MN}{AB}=\frac{VM}{VA}$ şi $\frac{QP}{CD}=\frac{VQ}{VD}\Rightarrow\frac{MN}{AB}+\frac{QP}{CD}=1\Rightarrow MN+QP=AB$.

…………………………………………………………1p

Deci trebuie să demonstrăm că înălţimea trapezului $MNPQ$ este mai mare sau egală cu jumătate din latura bazei.

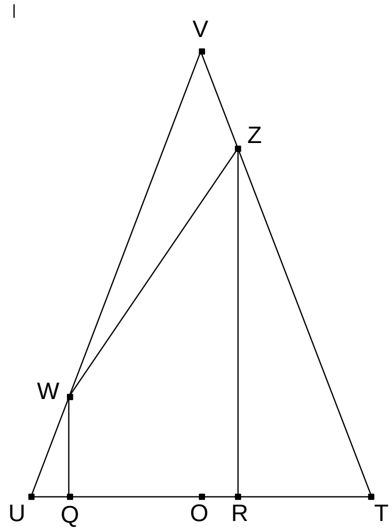
…………………………………………………………1p

Fie U,T,W,Z mijloacele segmentelor $[AB]$,$[CD]$, $[MN]$ şi $[QP]$ atunci evident V,U,W, respectiv V,Z,T sunt coliniare şi WZ este înălţime a trapezului $MNPQ$, iar $UT=AB$.

…………………………………………………………1p

ΔVUT este isoscel şi $WU = VZ$. Deci avem de demonstrat că

$WZ \geq \frac{1}{2}UT$



Fie $WQ, ZR, VO \perp UT$.

$$\frac{UQ}{UO} + \frac{TR}{TO} = \frac{UW}{UV} + \frac{TZ}{TV} = 1 \Rightarrow UQ + RT = UO = \frac{AB}{2}.$$

....1p

Atunci $QR = \frac{AB}{2}$ şi cum $WZ \geq QR \Rightarrow WZ \geq \frac{1}{2}AB$

....1p