Concursul regional de matematică „Ioan Aron”
clasa a III-a – etapa regională
mai 2024
Barem

1. Știind că:
   a = 10 000 - 100 x (54 : 9 : 3 x 8) :10 + 50 – 45 x 219
   b = 1 + 9 x (10 – 6 x 4 : 3 : 2 x 9 : 6) : 9 + 5
   c = 5 + 5 x 5 – 5 : 5 x 25

   Calculează:
   a x b – b: c =
   b x (a : c) =
   (a + b x c) – c =

   $a = 10\,000 - 100 \times (\underline{54 : 9 : 3 \times 8}) : 10 + 50 - 45 \times 219$
   $a = 10\,000 - \underline{100 \times 16 : 10} + 50 - \underline{45 \times 219}$
   $a = 10\,000 - 160 + 50 - 9855$
   $a = 35$ 1,5 p

   $b = 1 + 9 \times (10 - \underline{6 \times 4 : 3 : 2 \times 9 : 6}) : 9 + 5$
   $b = 1 + 9 \times (\underline{10 - 6}) + 5$
   $b = 1 + \underline{9 \times 4 : 9} + 5$
   $b = 1 + 4 + 5$
   $b = 10$ 1,5 p

   $c = 5 + \underline{5 \times 5} - \underline{5 : 5 \times 25}$
   $c = 5 + 25 - 25$
   $c = 5$ 1 p

   a x b – b: c =
   $\underline{35 \times 10} - \underline{10 : 5} =$
   $350 - 2 = 348$ 1 p

b x (a : c) =
10 x (35 : 5) =
10 x 7 = 70 — 1 p

(a + b x c)– c =
(35 + 10 x 5)– 5 =
(35 + 50)– 5 =
85– 5 = 80 — 1 p

Total subiectul 1: 7 puncte

2. a) Bogdan are 6 jetoane cu flori și dorește să le schimbe pe toate pentru jetoane cu legume, urmând regulile de schimb stabilite între copii:
   - 1 jeton cu flori pentru 3 jetoane cu fructe;
   - 2 jetoane cu fructe pentru 4 jetoane cu legume.

   Câte jetoane cu legume va avea Bogdan?

REZOLVARE:

6 × 3 = 18 (jetoane cu fructe primite pentru 6 jetoane flori) — 1 p
18 : 2 = 9 (schimburi pe care le poate face pentru a obține jetoane cu legume) 1 p
9 × 4 = 36 (jetoane obținute în final, deoarece la fiecare schimb a primit câte 4 jetoane cu legume) — 1 p

b) Care este scăzătorul unei operații matematice al cărei descăzut este cel mai mare număr care se poate forma folosind cifrele 0, 9, 2 și 1 o singură dată, iar diferența este dublul celui mai mic număr de trei cifre, care are produsul cifrelor 7 ?

REZOLVARE:

9 210 → descăzutul — 1 p
117 → cel mai mic număr de trei cifre, cu produsul cifrelor 7 — 1 p
117 x 2= 234 (diferența) — 1 p
9 210 – 234 = 8 976 (scăzătorul) — 1 p

Total subiectul 2: 7 puncte

3. a) Ana, Maria și Elena sunt trei surori, care au economisit bani în pușculițele lor. Ana are 476 lei. Dacă i-ar da Mariei 39 lei, ar constata că Elena are tot atâția cât răsturnatul numărului corespunzător sumei de bani care i-ar rămâne Anei.
De câți bani mai are nevoie Ana pentru a avea tot atâția câți are Elena?

REZOLVARE:

476 – 39 = **437** (lei i-ar rămâne Anei) 1 p
437 → **734** (lei are Elena) 1 p
734 – 476 = **258** (lei mai are nevoie Ana) 1 p

b) Suma a 4 numere este 378. Primele 3 sunt numere pare consecutive. Al patrulea este triplul celui mai mic număr par de 3 cifre diferite.
Care sunt numerele?

REZOLVARE:

102 (Cel mai mic număr par de 3 cifre diferite) 0,5 p
102 x 3 = 306 (este al patrulea număr) 0,5 p
378 – 306 = 72 (este suma primelor 3 numere) 0,5 p

I /----------------/

II /----------------/+2 72 0,5 p

III /----------------/+2 +2

2 x 3 = 6
72 – **6** = 66 (de 3 ori primul număr) 0,5 p
66 : 3 = 22 (este primul număr) 0,5 p
22 + 2 = 24 (este al doilea număr) 0,5 p
24 + 2 = 26 (este al treilea număr) 0,5 p

Total subiectul 3: 7 puncte

4. Scăzând 10 din diferența a două numere, se obține 10.
Să se afle cele două numere, știind că, dacă micșorăm de șase ori suma lor, se obține 10. *(Gazeta Matematică Junior, nr. 129, noiembrie 2023)*

REZOLVARE:

10 +10=20 (diferența celor două numere)	1,5 p
6 x 10=60 (suma celor două numere)	1,5 p

$$\left.\begin{array}{l} a\ /\text{----------------}/ + 20 \\ \\ b\ /\text{----------------}/ \end{array}\right\} 60$$

0,5 p

60 **—** **20** = 40 (de 2 ori al doilea număr)	0,5 p
40 : 2 = 20 (este al doilea număr)	1,5 p
20 + 20 = 40 (este primul număr)	1,5 p

Total subiectul 4: 7 puncte

MINISTERUL EDUCAȚIEI

COLEGIUL NAȚIONAL
”PREPARANDIA – DIMITRIE ȚICHINDEAL”
Bd. Gen. Dragalina, nr. 5–7, Arad

ISJ ARAD
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu nr.26, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isiarad.ro e-mail: inf arad@isiarad.ro

Concursul de matematică „Ioan Aron”
clasa a IV-a - etapa regională
18 mai 2024
Barem

1. a) Calculați:

[(10 + 540 : 6) x 5 + 50 x 2] : 60=
[(10+90) x5+100]: 60= 1p
(100x 5 +100): 60= 1p
(500+100): 60= 1p
600: 60=10 0,5p
Total: 3,5p

b) Mircea are 10 ani.Valoarea numărului **a** din egalitatea următoare reprezintă vârsta lui Matei.

2 x [(2 x **a** - 36) : 2 + 20] – 32 = 10
Este vârsta lui Matei cu 1 mai mică decât dublul vârstei lui Mircea? Justificați!
2 x [(2 x a - 36) : 2 + 20]= 42
(2 x a - 36) : 2 + 20 = 21 0,5p
(2 x a – 36) : 2 = 1 0,5p
2 x a – 36 = 2 0,5p
2 x a = 38 0,5p
a =19 Matei are 19 ani 1p
2 x 10 – 1 = 19 (justificare răspuns) 0,5p
Total: 3,5p

Total subiectul 1: 7 puncte

2. a) Descoperă regula și completează șirul cu încă două numere:

4; 8; 24; 48; 144; ...; ...;

288, 864 1p

Află produsul dintre al doilea și al cincilea număr din șir.

8 x 288 = 2 304 1p

b)Se dau trei numere consecutive. Suma primelor două este cu 10 mai mare decât al treilea număr. Care sunt cele trei numere?

a /____________/
1
b /____________/__/ 0,5p
1 1
c /____________/__/__/

1 1
a + b /___________/__/___/______/ 0,5p
1 1
c /____________/__/__/ 10

10 + 2 = 12 0,5p
12 – 1 = 11 (a) 1p
11 + 1 = 12 (b) 1p
11 + 2 = 13 (c) 1p

Verificare: (11 + 12) – 13 = 23 – 13 = 10 0,5p

Total: 5p

Total subiectul 2: 7 puncte

3. a) Maria a scris trei numere având suma egală cu 5420. După ce din primul număr a scăzut 1015, din al doilea a scăzut 830, iar din al treilea a scăzut 1175, a obținut trei rezultate egale. Care sunt cele trei numere scrise de Maria la început?

1 015
a /______________/________/
830
b /______________/______/ 5 420 0,5p
1 175
c /______________/__________/

1 015 + 830 + 1 175 = 3 020 0,5p
(5 420 – 3 020) : 3 = 800 (valoarea unui segment) 0,5p
1 015 + 800 = 1 815 (a) 0,5p
830 + 800 =1 630 (b) 0,5p
1 175 + 800 = 1 975 (c) 0,5p
Verificare: 1 815 + 1 630 + 1 975 = 5 420

Total: 3p

b) Dacă așez câte 2 cărți pe un raft, rămân 35 de cărți pe dinafară. Dacă așez câte 7 cărți pe un raft, rămân 5 rafturi goale. Câte rafturi și câte cărți sunt?

2 cărți	…	2 cărți	+ 35 cărți
7 cărți	…	7 cărți	5 rafturi

7 – 2 = 5 0,5p
35 de cărți completează 35: 5 = 7 rafturi 0,5p
Cele 5 rafturi goale conțineau 5 x 2 = 10 cărți 0,5p
Cele 10 cărți completează 10 : 5 = 2 rafturi 0,5p
7 rafturi + 2 rafturi + 5 rafturi goale = 14 rafturi 0,5p

14 rafturi x 2 cărți + 35 cărți = 28 cărți + 35 cărți = 63 cărți 1,5p

Verificare: 14 rafturi – 5 rafturi goale = 9 rafturi pline
9 rafturi x 7 cărți = 63 cărți

Răspuns: 14 rafturi, 63 cărți

Total: 4p

Total subiectul 3: 7 puncte

4. Numărul elevilor dintr-o clasă este mai mare decât 20, dar mai mic decât 25. Un sfert din numărul fetelor este egal cu jumătate din numărul băieților. Fiecare elev practică un sport: unii înot, alții tenis. O treime din numărul celor care practică înotul este egal cu o cincime din numărul celor care joacă tenis.
Știind că 10 fete practică tenisul, aflați câți băieți practică înotul.

fete /______/______/______/______/
0,5p
băieți /______/______/

6 x ? = produs cuprins între 20 și 25
6 x 4 = 24, deci 4 reprezintă valoarea unui segment 1p
4 x 4 = 16 (fete) 1p
2 x 4 = 8 (băieți) 1p

înot /______/______/______/
24 0,5p
tenis /______/______/______/______/______/

24 : 8 = 3 (valoarea unui segment) 1p
3 x 3 = 9 (copii practică înotul) 0,5p

5 x 3 = 15 (copii practică tenisul) 0,5p
15 (copii) – 10 (fete) = 5 (băieți practică tenisul) 0,5p
8 – 5 = 3 (băieți practică înotul) 0,5p

Total subiectul 4: 7 puncte

Concursul de matematică „Ioan Aron”
clasa a V-a - etapa regională
18 mai 2024
BAREM

1.

$a)$ $x = 2024^2 - 2024 - 2023 = 2024(2024-1) - 2023 = 2124 \cdot 2023 - 2023 = 2023(2024-1) = 2023^2$.

…………………2p

$y+1 = 1+1+2^1+2^2+...+2^{2024} = 2^1+2^1+2^2+...+2^{2024} = 2^2+2^2+2^3+...+2^{2024} =$

$= 2^3+2^3+2^4+...+2^{2024} = ... = 2^{2024}+2^{2024} = 2^{2025} = \left(2^{675}\right)^3$. …………………1p

$b)$ Grupând câte trei termenii sumei obținem:

$y = \left(1+2^1+2^2\right)+\left(2^3+2^4+2^5\right)+...+\left(2^{2022}+2^{2023}+2^{2024}\right) = 7+2^3\cdot 7+...+2^{2022}\cdot 7 = 7(1+2^3+\cdots+2^{2022})$

deci y este divizibil cu 7. …………………2p

Grupând câte cinci termenii sumei obținem:

$y = \left(1+2^1+2^2+2^3+2^4\right)+\left(2^5+2^6+2^7+2^8+2^9\right)+...+\left(2^{2020}+2^{2021}+2^{2022}+2^{2023}+2^{2024}\right) =$

$y = 31+2^5\cdot 31+...+2^{2020}\cdot 31 = 31\left(1+2^5+...+2^{2020}\right)$, deci y este divizibil cu 31. …………………2p

2.

Din $n+S(n)=2023$ deducem că $n<2023$, deci n nu poate avea mai mult de patru cifre. Dacă n are trei cifre, atunci $n+S(n)\leq 999+27=1026<2023$, ceea ce înseamnă că n nu poate avea trei cifre.

…………………2p

Dacă $n=\overline{abcd}$, avem $n+S(n)=1001a+101b+11c+2d=2023$. Rezultă că $a=1$ sau $a=2$.

…………………1p

Pentru $a=1$ se obține $101b+11c+2d=1022$, iar mai departe $b=9$, $11c+2d=113$, adică $c=9$ și $d=7$.
În acest caz avem $\overline{abcd}=1997$. …………………2p

Pentru $a=2$ se obține $101b+11c+2d=21$, iar mai departe $b=0$, $c=1$ și $d=5$. În acest caz avem $\overline{abcd}=2015$. …………………2p

În concluzie avem $n=1997$ sau $n=2015$.

3.

a) Fie b numărul de băieţi şi f numărul fetelor

$b+f=12$ şi $fb+f(f-1)=55$ …………………1p

$f(f+b-1)=55$ …………………1p

$f=5$ şi $b=7$ …………………1p

$b)$ Împărțim cele 9 bile în trei grupuri (notăm cu A, B și C aceste grupuri) de cate 3 bile fiecare. Punem pe un taler grupul A si pe alt taler grupul B. …………………1p

Dacă talerele nu sunt în echilibru, bila ușoară se afla pe talerul care rămâne în sus.

Altfel, daca balanța este in echilibru, bila ușoară se afla in grupul C. …………………1p

Am reușit astfel, printr-o cântărire să determinam un grup de 3 bile în care se afla bila ușoară. Din acest grup luăm și punem câte o bilă pe fiecare taler. …………………1p

Dacă balanța este în echilibru bila ușoară este cea care nu a fost pusă pe balanță, altfel este bila de pe talerul aflat mai sus. …………………1p

4.

Presupunem că avem $k \geq 2$ copii și notăm cu $a_1, a_2, ..., a_k$ vârstele lor. Conform ipotezei avem

$a_1+a_2+...+a_k=p$, de unde $p \geq k$. …………………2p

Peste trei ani suma vârstelor va fi $(a_1+3)+(a_2+3)+...+(a_k+3)$ de unde va rezulta că $p+3k=p^2 \Leftrightarrow$

$3k=p(p-1)$. …………………2p

Din egalitatea de mai sus avem că $3k$ este multiplu de p și cum p este prim se disting următoarele situații.

1. $k \vdots p$ și cum $p \geq k$ va rezulta $p=k$, deci $3p=p(p-1)$ de unde $p=4$, absurd. …………………1p

2. $3 \vdots p$ și cum p prim va rezulta $p=3$, deci $3k=6$ de unde $k=2$. …………………1p

Obținem că avem doi copii cu suma vârstelor egală cu trei, prin urmare un copil are un an iar celălalt doi ani. …………………1p

Concursul de matematică „Ioan Aron"
clasa a VI-a - etapa regională
18 mai 2024
BAREM

1.

$$\left.\begin{array}{l}[AB] \equiv [AC] \\ \sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACN \\ [BM] \equiv [CN]\end{array}\right\} \overset{\text{L.U.L}}{\Longrightarrow} \Delta\, AMB \equiv \Delta\, ANC \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NAC;\ \sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle ANC.$ 2p

$\Delta\, PAB$ și ΔQAC dr.

$$\left.\begin{array}{l}[AB] \equiv [AC] \\ \sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle CAQ\end{array}\right\} \overset{\text{I.U.}}{\Longrightarrow} \Delta\, PAB \equiv \Delta\, QAC \Longrightarrow [BP] \equiv [CQ].$$ 2p

b) $\Delta\, PMB$ $și$ $\Delta\, QNC$ dr.

$$\left.\begin{array}{l}[MB] \equiv [CN] \\ \sphericalangle PMB \equiv \sphericalangle QNC\end{array}\right\} \overset{\text{I.U.}}{\Longrightarrow} \Delta\, PMB \equiv \Delta\, QNC \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \sphericalangle PBM \equiv \sphericalangle QCN$ 2p

și cum $\sphericalangle PBM \equiv \sphericalangle CBE$ (opuse la vârf) și $\sphericalangle QCN \equiv \sphericalangle BCE$ (opuse la vârf)

$\Longrightarrow \sphericalangle CBE \equiv \sphericalangle BCE \Longrightarrow \Delta\, BEC$ este isoscel. 1p

2.

$$\frac{xy}{24} = \frac{x+y}{7} \Leftrightarrow \frac{xy}{x+y} = \frac{24}{7} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{7}{24} \Longrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{24}$$

......................2p

$$\frac{xz}{8} = \frac{x-z}{1} \Leftrightarrow \frac{x-y}{xz} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{1}{8}$$

......................2p

Atunci:

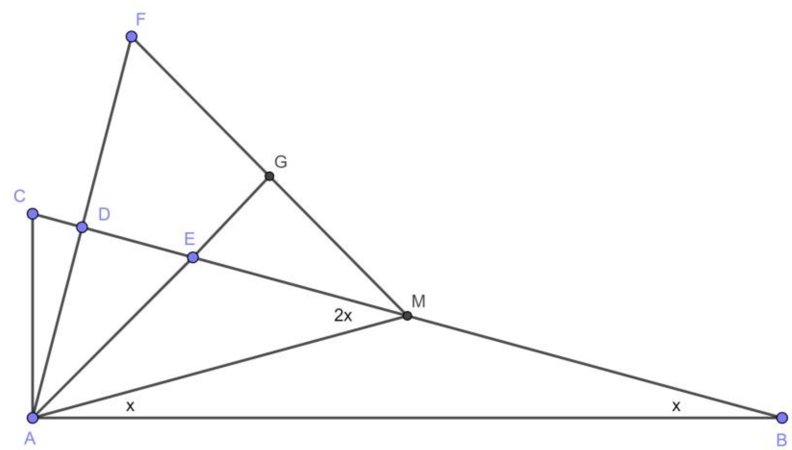
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{7}{24} + \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{10}{24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{yz}{12} = \frac{y+z}{5}$$

de unde reiese cerința

......................3p

3.



......................1p

Pentru a fixa ideile, considerăm $\hat{B} < \hat{C}$. Notăm $\hat{B} = \widehat{MAB} = x \Rightarrow \widehat{AMC} = 2x$ și $\hat{C} = 90° - x$

$\Rightarrow \widehat{CAD} = x \Rightarrow AE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DAM}$. 1p

Fie *F* simetricul lui *A* față de D. Atunci *AM* = *FM*. 1p

Fie {*G*} = *AE* ∩ *FM*.

,,⇒ ” În triunghiul *AMF*, *MD* este mediană, iar *ME* = 2*ED* ⇒ *E* este centrul de greutate al △*AMF* ⇒ *AG* este mediană și bisectoare ⇒ *AF* = *AM* ⇒ △*AMF* este echilateral ⇒ 2*x* = 30° ⇒ *x* = 15°.

......................2p

,,⇐” x = 15° ⇒ 2x = 30°. Cum AM = FM, atunci înălțimea MD este și bisectoare, deci $\widehat{AMF} = 2 \cdot 30° = 60°$. ⇒ △AMF este echilateral ⇒ bisectoarea AG este și mediană, deci E este centrul de greutate al △AMF, prin urmare ME=2ED. 2p

4.

Fie $\frac{x^2}{3x+y} = p$, p număr prim. Va rezulta $x^2 = p(3x+y)$ deci $x \,\vdots\, p$, prin urmare $x = pa$, $a \in \mathbb{N}^*$, deci $(pa)^2 = p(3pa+y)$. Atunci $pa^2 = 3pa + y$, de unde $pa(a-3) = y$.

......................2p

Cum $y \in \mathbb{N}^*$ obținem că $a-3 \geq 1$, deci $pa \leq y$ adică $x \leq y$.

......................2p

În mod analog, folosind faptul că $\frac{y^2}{3y+x}$ este prim, obținem $y \leq x$.

......................1p

Va rezulta că numerele x și y sunt egale și mai mult $x = y = 4p$, p număr prim.

......................1p

Atunci $\frac{xy}{2(x+y)} = \frac{16p^2}{16p} = p$, de unde reiese cerința.

......................1p

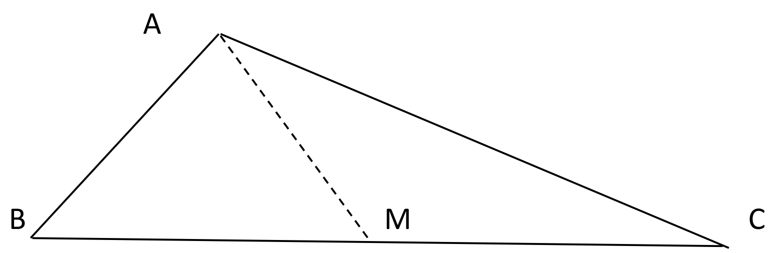
MINISTERUL EDUCAȚIEI

COLEGIUL NAȚIONAL
”PREPARANDIA – DIMITRIE ȚICHINDEAL”
Bd. Gen. Dragalina, nr. 5–7, Arad

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu nr.26, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isiarad.ro e-mail: inf arad@isiarad.ro

Concursul de matematică „Ioan Aron”
clasa a VII-a - etapa regională
18 mai 2024
BAREM

1.



a) $BC = 2BM$, $BC = AB\sqrt{2}$ $\Rightarrow 2BM = AB\sqrt{2} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 1p

$BC = AB\sqrt{2} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 1p

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{AB}{BC}$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B$ L.U.L. $\Rightarrow \Delta BMA \sim \Delta BAC \Rightarrow \sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle BAC$

....................2p

b) $\Delta BMA \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{MA}{AC} \Rightarrow AM = \frac{AB \cdot AC}{BC}$ 3p

2.

$n^4 - n^2 - 8 = k^2, k \in \mathbb{N}$

$n^4 - n^2 - 8 = k^2 \mid \cdot 4$

$4n^4 - 4n^2 - 32 = 4k^2$

$(2n^2 - 1)^2 - 33 = 4k^2$ 2p

$(2n^2 - 1)^2 - (2k)^2 = 33 \Leftrightarrow (2n^2 - 1 + 2k)(2n^2 - 1 - 2k) = 33$ 2p

Întrucât $2n^2 - 1 + 2k \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$ și

$2n^2 - 1 + 2k \geq 2n^2 - 1 - 2k$

avem cazurile:

....................1p

<u>Cazul 1:</u>

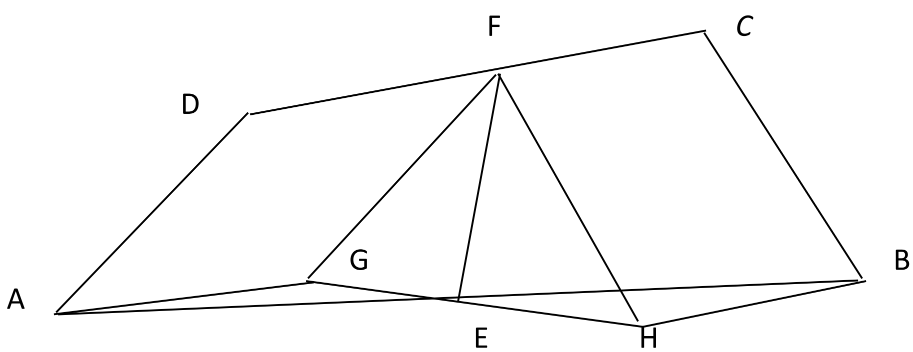
$$\left.\begin{array}{l} 2n^2 - 1 + 2k = 33 \\ 2n^2 - 1 - 2k = 1 \end{array}\right| \overset{+}{\Rightarrow} n^2 = 9 \Rightarrow n \in \{-3; 3\}$$ 1p

<u>Cazul 2:</u>

$$\left.\begin{array}{l} 2n^2 - 1 + 2k = 11 \\ 2n^2 - 1 - 2k = 3 \end{array}\right| \overset{+}{\Rightarrow} n^2 = 4 \Rightarrow n \in \{-2; 2\}$$ 1p

$n \in \{-3, -2, 2, 3\}$

3.



Fie E, F mijloacele pentru laturile A, B, respectiv CD.
Construim paralelogramele: ADFG și BCFH. 2p

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dacă ADFG paralelogram} \Rightarrow DF \parallel AG \\ \text{Dacă BCFH paralelogram} \Rightarrow FC \parallel BH \end{array}\right| \Rightarrow AG \parallel BH \Rightarrow AGBH \text{ paralelogram}$$

....................2p

E este mijloc și pentru HG. 1p

$AD \parallel GF \Rightarrow \left(\widehat{AD, EF}\right) = \left(\widehat{GF, FE}\right) = \widehat{GFE}$

$BC \parallel FA \Rightarrow \left(\widehat{BC, EF}\right) = \left(\widehat{FH, EF}\right) = \widehat{HFE}$

Avem:

$$\left.\begin{array}{l} AD = FG \\ BC = FH \\ AD = BC \end{array}\right| \Rightarrow FG = FH \Rightarrow \Delta FGH \text{ isoscel}$$

....................1p

FE mediană, deci FE bisectoare $\Rightarrow \sphericalangle GFE \equiv \sphericalangle HFE$ 1p

4.

Dacă avem obținute numerele a, b, c la următorul pas se vor obține numerele:

$x = \frac{2bc}{b+c}$, $y = \frac{2ac}{a+c}$ respectiv $z = \frac{2ab}{a+b}$. 2p

Observăm că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 2p

Deci, suma inverselor numerelor obținute la fiecare pas va fi egală cu

$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 1$. 2p

Dar $\frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} \neq 1$, deci numerele obținute nu pot fi acestea.

....................1p

Concursul de matematică „Ioan Aron”
clasa a VIII-a - etapa regională
18 mai 2024
BAREM

1.

a) MO – linie mijlocie în ΔVAC 1p

$\Rightarrow MO \parallel VA \Rightarrow \sphericalangle(MO;(VBD)) = \sphericalangle(VA;(VBD)) = \sphericalangle(VA;VO) = \sphericalangle AVO = 45°$

....................2p

b) $SB \perp (VBD) \Rightarrow SB \perp VD,$ 1p

Dar, $VD \perp VB$ (ΔVBD $dr. is$) 1p

$$\left.\begin{array}{l}\text{Deci } VD \perp SB\\ VD \perp VB\\ SB, VB \subset (VBS)\end{array}\right\} \Rightarrow VD \perp (VBS)$$ 2p

2. a) Avem $\frac{2xy}{x+y} \le \sqrt{xy} \Leftrightarrow 2xy \le \sqrt{xy}(x+y) \Leftrightarrow 4xy \le (x+y)^2 \Leftrightarrow 0 \le (x-y)^2.$

....................3p

b)

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$$

....................1p

Avem

$\frac{2a}{\sqrt{bc}} + \frac{2b}{\sqrt{ac}} + \frac{2c}{\sqrt{ab}} \le a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ (de arătat) 1p

Cu inegalitatea $m_h \le m_g$ avem: $\frac{2bc}{b+c} \le \sqrt{bc} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{bc}} \le \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{bc}} \le a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

și analoagele 1p

Adunând aceste ultime relații se obține concluzia. 1p

3. Avem condiția de existență $x > 0$.

Notăm $\sqrt{x} = y; y > 0$ 1p

Ecuația devine:

$$\frac{1}{y^2+y+2}+\frac{1}{y^2-y+2}=\frac{3}{4y}$$

care este echivalentă cu:

$$\frac{1}{y+1+\frac{2}{y}}+\frac{1}{y-1+\frac{2}{y}}=\frac{3}{4}$$

....................2p

Notăm: $y+\frac{2}{y}=z$

Atunci avem:

$\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}=\frac{3}{4}$ 1p

care este echivalentă cu:

$3z^2-8z-3=0$

care are soluțiile 3 și $-\frac{1}{3}$

($-\frac{1}{3}$ nu convine) 1p

$y+\frac{2}{y}=3 \Leftrightarrow y^2-3y+2=0 \Leftrightarrow y \in \{1;2\}$ 1p

Deci, $x \in \{1,4\}$ 1p

4.

Fie p număr prim, $p \geq 3$, astfel ca $\sqrt{n+p}-\sqrt{n}=q \in \mathbb{Q}^*$ 1p

Atunci $2n+p-2\sqrt{n^2+pn}=q^2$

deci $\sqrt{n^2+pn} \in \mathbb{Q}$, de unde rezultă că n^2+pn este pătrat perfect. 1p

Obținem că există $y \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $n^2+pn=y^2$ (dacă $y=0$ atunci $n=0$, deci $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, absurd) 1p

Avem că $(2n)^2+4pn=(2y)^2$ sau $(2n+p)^2-(2y)^2=\mathrm{p}^2$,

de unde obținem că $(2\mathrm{n}+\mathrm{p}-2\mathrm{y})(2\mathrm{n}+\mathrm{p}+2\mathrm{y})=\mathrm{p}^2$ 2p

Cum p este număr prim va rezulta $2n+p-2y=1$ și

$2n+p+2y=\mathrm{p}^2$, relații care adunate conduc la $4n+2p=\mathrm{p}^2+1$,

Adică $n=\left(\frac{\mathrm{p}-1}{2}\right)^2$

....................2p