



## Concursul de matematică „Ioan Aron” clasa a V-a - etapa județeană 6 martie 2023

1. a) Arătați că suma a patru numere naturale consecutive nedivizibile cu 5 este divizibilă cu 10.

b) Să se arate că numărul

$$n = \overline{xy} + \overline{yx} + 3x - 4y ; x, y \neq 0, \text{ nu este prim.}$$

2. Să se compare numerele:

$$A = 5^{2023} - 5^{2022}$$

$$B = 2^{4042} + 2^{4045} + 2^{4046}$$

3. Determinați câtul și restul împărțirii numărului A la numărul B dacă:

$$A = 7 \cdot 2^{n+4} + 5 \cdot 2^{n+2}$$

$$B = 9 \cdot 2^n ; n \in \mathbb{N}$$

4. Fie  $N = (2024^2 - 2024)(2024^2 - 2024 + 2) + 1$ .

Să se arate că suma cifrelor lui N este divizibilă cu 9.

Fiecare subiect valorează 7 puncte.

Timp de lucru: 2 ore



**Concursul de matematică „Ioan Aron”  
clasa a VI-a - etapa județeană  
6 martie 2023**

1. (7p) Să se determine  $x, y, z, t$  știind că  $x=50\%y$ ,  $y=75\%z$ ,  $z=50\%t$  și  $4x+3y+2z+t=930$ .
2. (7p) Să se arate că numărul  $2^{2007}$  nu poate fi scris ca o sumă de numere naturale consecutive.
3. (7p) Pe o tablă sunt desenate 20 cercuri albe, 21 roșii și 22 verzi. Se șterg două cercuri de culori diferite și se desenează în locul lor un cerc de a treia culoare. Se repetă operația de mai multe ori. Dacă la urmă rămâne un singur cerc, precizați culoarea lui.
4. (7p) Aflați măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente, știind că suplementul sumei celor două unghiuri este o cincime din suma suplementelor celor două unghiuri.

Fiecare subiect valorează 7 puncte.

Timp de lucru: 2 ore



## Concursul de matematică „Ioan Aron” clasa a VII-a - etapa județeană 6 martie 2023

- (7p) a) Demonstrați că pentru orice numere raționale avem:
  - $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
  - $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$b) Fie  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $ad = b^2 + bc + c^2$ . Demonstrați că numărul  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  este compus.
- (7p) Se consideră paralelogramul ABCD cu  $m(\sphericalangle DAB) < 90^\circ$ . Bisectoarea unghiului DAB intersectează pe BD în M, iar bisectoarea unghiului ADC intersectează pe AC în N. Arătați că :
  - $DM \cdot NC = AN \cdot MB$
  - patrulaterul ANMD este trapez ortodiagonal.
- (7p) Fie triunghiul ABC în care [AO] este mediană, G este centrul de greutate al triunghiului ABC, iar  $GD \parallel AB$  și  $GE \parallel AC$ , unde D și E sunt pe latura (BC).
  - Dacă H este un punct situat în exteriorul triunghiului ABC și reprezintă simetricul punctului G față de punctul O, arătați că GEHD este un paralelogram.
  - Dacă  $DG \cap AE = \{M\}$  și  $DG \cap BH = \{N\}$ , arătați că  $MN = 2 \cdot DG$ .
- (7p) Aflați numerele pentru care  $\frac{a}{bc+1} + a = \overline{a, bc}$ .

Fiecare subiect valorează 7 puncte.

Timp de lucru: 2 ore



## Concursul de matematică „Ioan Aron” clasa a VIII-a - etapa județeană 6 martie 2023

1. Se consideră expresia  $E(x) = 2(x + 3)^2 - (4 + x)(x - 4) - 5(x + 4) - 2$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Arătați că  $E(x) + \frac{1}{4} \geq 0$ ;  $(\forall)x \in \mathbb{R}$ ;

b) Determinați partea întreagă a numărului:

$$A = \frac{1}{E(-2)} + \frac{1}{E(-1)} + \frac{1}{E(0)} + \dots + \frac{1}{E(2023)}.$$

2. a) Fie  $x$  un număr real nenul și  $n \geq 2$  un număr natural astfel încât  $\frac{x^2+1}{x} = \sqrt{2n+1}$ . Arătați că  $\frac{x^8+(8n+2)x^4+1}{x^4}$  este un număr natural pătrat perfect, pentru orice număr natural  $n \geq 2$ .

b) Determinați numerele reale  $x, y, z$  pentru care:

$$2x^2 + 5y^2 + z^2 + 5y + 4 = 2x + 3z$$

3. Într-un trapez ABCD, baza mare este situată în planul  $\alpha$ , punctele C și D nu sunt situate în planul  $\alpha$ , iar  $\frac{CD}{AB} = \frac{5}{13}$ .

Știind că distanța de la punctul C la planul  $\alpha$  este de 54 cm, aflați distanța de la punctul O de intersecție a diagonalelor trapezului la planul  $\alpha$ .

4. a) Fie  $x, y$  două numere reale pozitive. Arătați că:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}.$$

b) Fie  $a, b, c \geq 0$  astfel încât:

$$\sqrt{2023+a} + \sqrt{2023+b} = 2\sqrt{2023+c}.$$

Să se arate că  $a + b \geq 2c$ .

Fiecare subiect valorează 7 puncte.

Timp de lucru: 2 ore